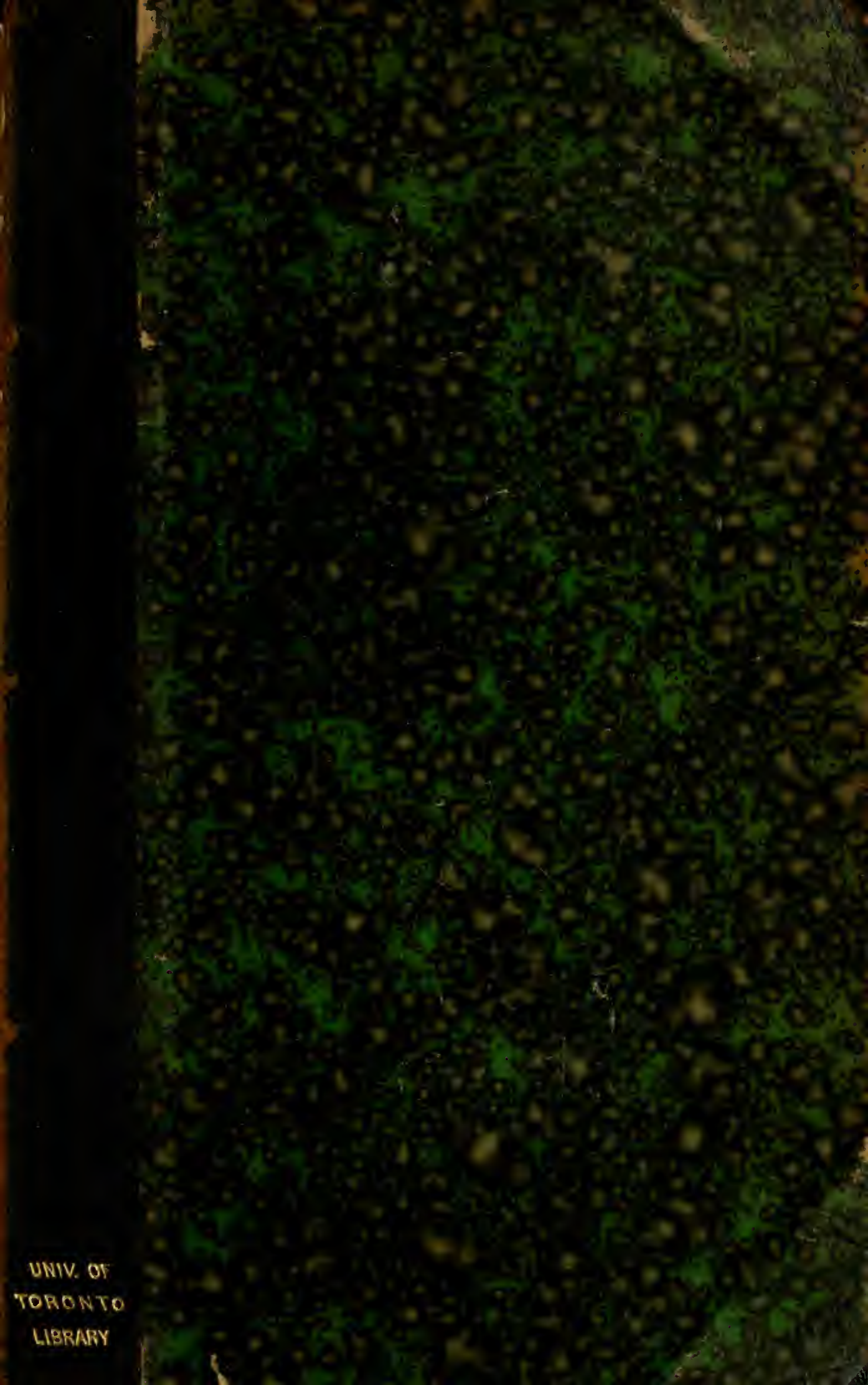

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Publié sous la direction

de M. DE LONGCHAMPS
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS

4e SÉRIE

TOME PREMIER

Année 1892.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1892

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès,**

(*Suite*, voir page 265, année 1891.)

XXI. — Sur les cercles que déterminent chacun des deux points du couple isogonal et deux sommets du triangle ABC.

Théorème. — M *et* M′ *étant deux points isogonaux, 1° les cercles* MBC, M′BC *sont symétriquement inverses. 2° Si* E, F *désignent les points de rencontre du premier avec* AC, AB *;* e, f *ceux du second avec* AB, AC, *la circonférence* BEf *est tangente à* AB *et la circonférence* CF *est tangente à* AC. *3° Le point* L, *où se coupent* BE, CF, *et le point* L′, *où se coupent* Bf, Ce, *sont symétriques relativement au milieu* D *de* BC*; les droites* AL, AL′ *sont isogonales ; les trois droites* LL′, Ee, Ff *sont concourantes : le point de concours est situé sur la symédiane* Ad *de* ABC *qui est aussi symédiane de* ALL′. *4° Si* f′ *est le symétrique de* f *relativement à* D *et* e′ *le symétrique de* e, *la circonférence* BFf′ *est tangente à* BL *et la circonférence est* CEe′ *tangente à* CL.

1° Le transformé m de M étant l'isocyclique de M′ appartient à la circonférence M′BC, de sorte que cette circonférence, passant par les transformés m, C, B des trois points M, B, C est la transformée de la circonférence MBC.

Ces deux circonférences, ainsi que leurs centres, seront désignés par G, G′, et leurs rayons par ρ, ρ'.

2° Il suit de là que e, f sont les transformés de E, F, et que, en conséquence, BE, CF sont parallèles, ainsi que Bf, Ce. Dans

le quadrilatère inscriptible BECF, BE est antiparallèle à CF et par suite à BFf, relativement à l'angle A. Donc la circonférence BEf est tangente à AB. Pour la même raison, la circonférence CFe est tangente à AC. De sorte que $c^2 = AE.Af$; $b^2 = AF.Ae$.

3° Les deux parallèles BE, Ce, coupées par les deux parallèles Bf, CF, déterminent un parallélogramme dont les sommets opposés sont B et C, L et L'. Donc L et L' sont symétriques relativement au milieu D de BC.

Les circonférences ACe, ABf, transformées des droites BE, CF, se coupent en un point l qui est le transformé de L; par conséquent AL et Al sont deux droites isogonales. Or les axes radicaux de la circonférence M'BC respectivement avec ces deux circonférences sont Ce, Bf; donc la rencontre L' de Ce, Bf est sur l'axe radical Al des circonférences ACe, ABf, et les droites AL', AL sont isogonales.

Les deux triangles LEF, L'ef ont leurs trois côtés respectivement parallèles, donc les trois droites LL', Ee, Ff concourent en un point I le centre de similitude de ces triangles. Dans le trapèze EFfe, dont les côtés non parallèles Fe, Ef se coupent en A, le point de rencontre I des diagonales Ee, Ff se trouve sur la médiane issue de A, dans le triangle AEF, et comme EF est antiparallèle à BC, relativement à l'angle A, cette médiane est symédiane de ABC. D'ailleurs les deux triangles ABC, ALL' ayant leur médiane AD commune, ainsi que la bissectrice de l'angle A, ont également leur symédiane commune; de sorte que I est le pied de la symédiane, issue de A, dans le triangle ALL'.

4° Le point f' est à la rencontre de CF et d'une parallèle à AC, menée par B. Comme BF et EC sont antiparallèles relativement à l'angle CLE, BF et Bf' le sont aussi, et la circonférence BFf' est tangente à BL. — On prouverait, de même que la circonférence CEe' est tangente à CL.

On obtiendrait une propriété analogue en considérant les symétriques de E et de F, relativement à D.

Notons encore les similitudes des triangles AEL et ABL', AFL et ACL', AfL' et ABL, AeL' et ACL : ils sont deux à deux symétriquement semblables.

Corollaire. — *Si* l *est l'intersection des circonférences* ACe, ABf, *et* l′ *celle des circonférences* ABE, ACF; *que* E′, F′ *soient les points harmoniquement opposés : le premier à* e, *le second à* f, *relativement à* Ad : *1°* l, l′ *sont aussi harmoniquement opposés relativement à* Ad ; *2° les circonférences* CfF′, CAl *sont tangentes et aussi les circonférences* BeE′, BAl. *3° On a*

$$\frac{\mathrm{Bl}}{\mathrm{Cl}} = \frac{\mathrm{El}'}{\mathrm{El}'}, \qquad \frac{\mathrm{Cl}'}{\mathrm{Bl}'} = \frac{el}{fl}.$$

1° Les points l, l' sont les transformés de L, L′ et comme L, L′ passe par D milieu de BC, la circonférence All' passe par d transformé de D, c'est-à-dire que l, l' sont deux sommets opposés du quadrilatère harmonique Aldl'.

2° Le point D étant le milieu de ff', le point F′ harmoniquement opposé à f, relativement à Ad, est le transformé de f'. Et puisque la circonférence BFf' est tangente à BL, la circonférence CfF′ l'est à la circonférence CAl.

3° BECF est inscriptible; donc LB.LE = LC.LF,

$$\text{ou} \qquad \frac{\mathrm{CL}}{\mathrm{BL}} = \frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{FL}}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{BL}'}{\mathrm{CL}'} = \frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{FL}}.$$

De là, par la règle habituelle de transformation,

$$\frac{\mathrm{C}l'}{\mathrm{B}l'} \cdot \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{el}{fl} \cdot \frac{\mathrm{A}f}{\mathrm{A}e}.$$

Mais $\mathrm{AB}.\mathrm{A}e = \mathrm{AC}.\mathrm{A}f.$

Donc $$\frac{\mathrm{C}l'}{\mathrm{B}l'} = \frac{el}{fl}.$$

Et de même $$\frac{\mathrm{B}l}{\mathrm{C}l} = \frac{\mathrm{E}l'}{\mathrm{F}l'}.$$

(A suivre).

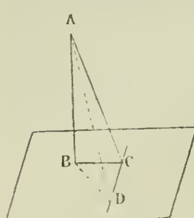
DÉMONSTRATIONS NOUVELLES

POUR TROIS THÉORÈMES DU CINQUIÈME LIVRE

Par M. **Léon Vautré**, professeur au Petit Séminaire d'Autrey (Vosges).

I. Théorème I. — *Soient* AB *perpendiculaire à un plan,* BC *perpendiculaire sur* CD *dans ce plan,* A *un point quelconque de* AB ; AC *est perpendiculaire à* CD.

Joignons les points A et B à un point quelconque D de CD.



On a $BC < BD$.

On en conclut, d'après le théorème des obliques à un plan

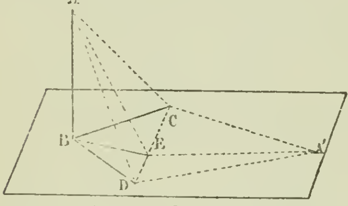
$$AC < AD$$

Donc AC est *la plus courte distance* du point A à la droite CD.

C. Q. F. D.

II. Théorème fondamental. — *Lorsqu'une droite* BA *est perpendiculaire à deux droites* BC, BD, *menées par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à toute autre droite* BE, *passant par son pied dans le plan.*

Nous nous appuierons sur ce théorème connu : La perpendiculaire élevée au milieu d'une droite AB partage le plan en deux régions, dont chacune contient l'un des points, A par exemple, et tous les points du plan plus rapprochés de A que de B.



L'un des quatre angles formés par les droites indéfinies BC, BD, contient la demi-droite BE. Coupons cet angle par une droite quelconque, qui rencontre les droites BC, BE, BD, aux points C, E, D. Le point E est situé entre les points C et D.

Joignons ces trois points à un point *quelconque* A de AB, et rabattons le triangle CDA en CDA′, sur le plan proposé.

On a, $CD < CA$ ou $CB < CA'$,

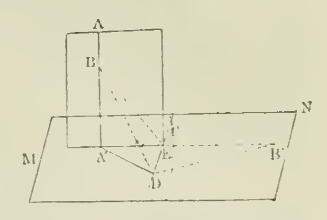
$DB < DA$ ou $DB < DA'$.

Dès lors, d'après le théorème auxiliaire, les points C et D, *et par suite aussi le point* E, sont situés du même côté que B, par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de la droite A′B.

Donc, d'après le même théorème, on a : $EB < EA'$. Ainsi EA, et par conséquent EB, est *la plus courte distance* du point E à la droite AB.

III. Théorème. — *Par un point donné quelconque, on peut mener une perpendiculaire à un plan donné* MN.

Par le point donné, A ou A′, menons un plan perpendiculaire sur une droite quelconque CD, du plan MN, puis, dans le plan auxiliaire, traçons la droite AA′ perpendiculaire à l'intersection A′E des deux plans. Il s'agit de prouver que AA′ est perpendiculaire à une droite quelconque A′D passant par son pied dans le plan MN.



Joignons les points D et E à un point *quelconque* B de la droite AA′, et rabattons le triangle DEB sur le plan MN.

Les angles DEA′ et DEB étant droits, par construction, le rabattement EB′ de EB se trouve être le prolongement de EA′, et comme on a, par hypothèse,

$$EA' < EB \quad \text{ou} \quad EA' < EB' ;$$

il en résulte $DA' < DB'$ ou $DA' < DB$;

par conséquent DA′ est *la plus courte distance* du point D à la droite AB.

VARIÉTÉS

LES PROGRÈS DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE EN 1891

Par M. **Émile Vigarié.**

Fidèle au programme que nous nous sommes posé, l'an dernier, nous venons donner un résumé bibliographique des recherches qui ont été faites pendant l'année 1891 dans la géométrie du triangle.

1. Méthodes de transformations. — Deux méthodes de transformations ont surtout été étudiées : l'une due à M. Bernès (*Transformation par inversion symétrique*, *J. E.*, pp. 121-127, 145-148, 175-181, 197-207, 217-224, 244-252, 265-273, *à suivre*) et qui a été exposée dans ce journal; l'autre

de M. Gob (*Sur quelques transformations de figures. A. F.* 1890, pp. 1-18) (*), c'est une étude de points inverses par rapport à un cercle d'Apollonius. Ce mémoire qui renferme une multitude d'aperçus nouveaux, est trop étendu pour que nous puissions en faire une étude exacte, même approchée; nous y renvoyons le lecteur.

Nous avons donné nous-même une note *sur la transformation de M. Schoute* qui n'est autre que la transformation par points jumeaux (*J. E.*, pp. 101-105, 129-131, 153-157, 181-183, 207-211, 256).

Enfin, M. Sollerstinsky, dans des *Nôtes et développements* sur les questions 357, 358 (*J. E.*, pp. 114-120), a indiqué plusieurs propositions se rapportant aux points inverses.

2. Figures directement semblables. — M. Schoute a publié les démonstrations des *Théorèmes généraux par rapport aux figures planes directement semblables* (*Annales de l'École polytechnique de Delft*, t. VI, pp. 51-71) dont nous avons fait connaître les énoncés à nos lecteurs (*J. E.*, 1890, pp. 9-11). Les principaux résultats de cette étude avaient été communiqués à l'Académie royale d'Amsterdam (27 septembre 1890, *Verslagen en Mededeelingen*, 3e série, t. VIII, p. 78) et à l'Académie des sciences de Paris (6 octobre 1890, *Comptes rendus*, p. 499).

3. Systèmes de coordonnées. — M. Poulain est revenu sur une question qu'il avait traitée en 1890. Dans sa Note *sur les coordonnées angulaires* (*J. E.*, pp. 52-56, 73-79), il a complété son travail antérieur et donné diverses formules. Les questions 282, 284, 285, 392, 293, 296, qu'il avait proposées sur ce sujet (*J. S.*, 1890), ont été résolues par M. Lormeau (*Des coordonnées angulaires*, *J. E.*, pp. 35-44). Ce dernier ravail contient quelques propositions nouvelles, dues à M. Poulain. M. Bernès (Lettre à M. de Longchamps, *J. E.*, pp. 109-112) a indiqué certaines simplifications dans l'exposition des résultats contenus dans la précédente Note.

(*) Les Comptes rendus des Congrès de l'Association française ne paraissant que dans le courant de l'année qui suit, nous analysons ici les Mémoires parus en 1890.

4. Distance de deux points. — Dans son intéressante brochure sur les *Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre* (voir l'analyse par M. de Longchamps, *J. E.*, p. 89), M. Thiry avait établi deux formules générales donnant la distance de deux points remarquables quelconques du plan du triangle (voir *J. E*, p. 90). Cette partie a été publiée dans le Bulletin de l'Académie royale de Belgique (*Distance des points remarquables du triangle*, t. XXI, pp. 471-481) et donnée, en supplément, au numéro de juin de *Mathesis*.

M. Poulain a montré (*Sur la distance de deux points*, *M.*, pp. 184-186) que la formule générale, donnée par M. Thiry, est un cas particulier d'une formule plus générale, due à Lagrange (1783) (voir t. V de l'*Édition Serret*, p. 535; Steiner, *Œuvres complètes*, t. II, pp. 102-159, ou *J. Crelle*, t. XXI, pp. 33-63). Une démonstration a été donnée par M. Poulain (*loc. cit.*); on en trouve une autre dans les *Exercices de Mécanique*, par M. de Saint-Germain (1880, n° 21).

5. Généralités. — M. G. de Galdeano, le savant directeur de *El Progreso Matematico*, a publié dans ce journal une série d'articles sur les généralités de la Géométrie du triangle et sur les travaux de M. Neuberg. Nous nous contenterons de citer les titres de ces articles :

1° *La Geometria elemental reciente* (*P. M.* pp. 75-82).

2° *Mémoire sur le tétraèdre, sur le point de Steiner par M. Neuberg* (*P. M.* pp. 134-139).

3° *Algunos trabajos de M. Neuberg sobre la Geometria del triangulo* (*P. M.* pp. 190-194).

4° *La evolucion de la Geometria del triangulo* (*P. M.* 223-228, 269-274).

6. Triangles orthologiques. — Les triangles orthologiques, que M. Lemoine avait fait connaître en 1889 (*J. E.* p. 71; *J. S.* p. 63), ont été, de la part du même auteur l'objet d'une étude approfondie (*Sur les triangles orthologiques et sur divers sujets de la Géométrie du triangle*, *A. F.* 1890, pp. 111-146.) Ce Mémoire, très étendu, contient une multitude de propositions nouvelles se rapportant à la droite d'Euler, à l'hyperbole de

Kiepert, aux cercles de Tucker, etc. Il se termine par le tableau de soixante-neuf relations métriques entre les divers éléments du triangle.

M. Boutin a continué la série de ses intéressants exercices (*Exercices divers*, *J. E.* pp. 132-134, 157-159, 184-186, 211-212, 224-227), qui, presque tous, se rapportent à la Géométrie du triangle.

7. Paraboles de M. Artzt. — M. de Longchamps qui avait étudié les paraboles de Artzt, en 1890, en a fait l'objet d'un nouveau travail. Dans ses *Développements sur les paraboles de M. Artzt* (*Progreso Matematico*, pp. 209-216, 250-253), M. de Longchamps, après avoir résumé ses Notes antérieures (*J. E.* 1890, pp. 149-151, *J. S.* 1890, pp. 149-153), donne de nouvelles propositions sur ces paraboles remarquables, et plusieurs relations métriques. Signalons aussi, sur le même sujet, le Mémoire suivant de M. W. Stegemann : *Dreiecks-scharen, Parabelscharen und Kegelschnittbüschel, welche durch drei ähnliche Punktreihen oder durch drei projectivische Strahlen-büschel erzeugt werden* (Archives de Grunert Hoppe, t. X, pp. 225-260).

(A suivre.)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(Concours de 1891.)

Mathématiques élémentaires.

On donne une sphère S *et deux droites* D, D′ *tangentes à cette sphère.*

1° Par un point quelconque de la droite D, *on mène les droites* G *et* G′ *qui touchent la sphère* S *et rencontrent la droite* D′ *; démontrer que les points de contact des droites* G *et* G′ *avec la sphère* S *décrivent deux circonférences* C *et* C′.

2° Démontrer que les droites G, *qui touchent la sphère* S *en des points situés sur la circonférence* C, *sont tangentes à une infinité de sphères* Σ.

3° *Trouver combien il y a de sphères* Σ *tangentes à un plan donné* Q. *Discuter le problème et trouver le lieu des traces des droites* G *sur le plan* Q.

1° Soient A et A′ les points de contact des droites D et D′ avec la sphère S *(fig. 1)*; par un point B pris sur la droite D, menons les tangentes BC et B′C′ au cercle suivant lequel la sphère est coupée par le plan déterminé par le point et la droite D′, et désignons par M, M′ les points de contact de ces deux tangentes.

Projetons la figure, parallèlement à AA′, sur un plan P

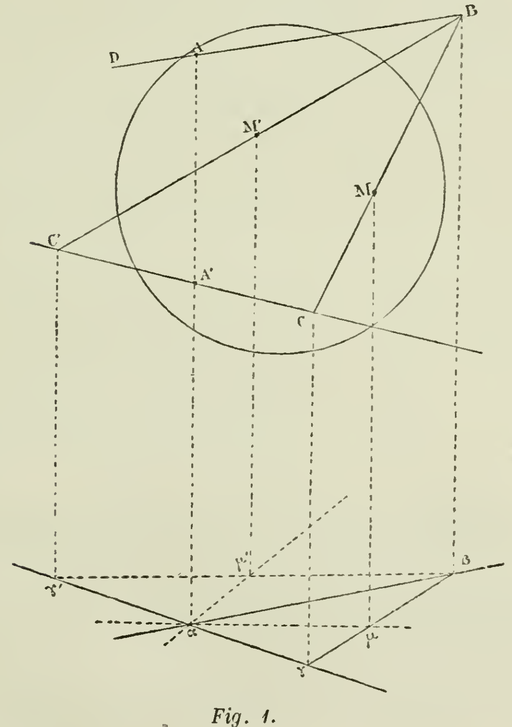


Fig. 1.

parallèle aux droites D et D′; les droites D, D′, BC, B′C′ ont pour projections $\alpha\beta$, $\alpha\beta'$, $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$, et les points M et M′ se pro-

jettent en μ et μ'. On a

$$\frac{\mu\gamma}{\mu\beta} = \frac{MC}{MB}.$$

On a aussi :

$$MC = A'C = \alpha\gamma, \qquad MB = AB = \alpha\beta.$$

Conséquemment $$\frac{\mu\gamma}{\mu\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta}.$$

Donc le point μ décrit la bissectrice de l'angle $\beta\alpha\gamma$; on voit de même que le point μ' décrit la bissectrice de l'angle $\beta\alpha\gamma'$. Par suite, le lieu du point M est une circonférence C_1 passant par A et A', et le lieu du point M' est une seconde circonférence C'_1, passant aussi par A et A'.

2° Considérons les droites G qui touchent la sphère S en des points situés sur C_1, et soit (*fig. 2*) BC une de ces droites.

Le plan perpendiculaire au milieu de AM a tous ses points également distants de BC et de D, car $BM = BA$; le plan perpendiculaire au milieu de MA' a tous ses points également distants de BC et de D', car $CM = CA'$. Ces deux plans se coupent suivant une droite OZ perpendiculaire au plan du cercle C_1, et qui passe par son centre O. Chaque point de OZ étant équidistant des droites D, D' et d'une droite G quelconque, est le centre d'une sphère Σ tangente à toutes les droites G.

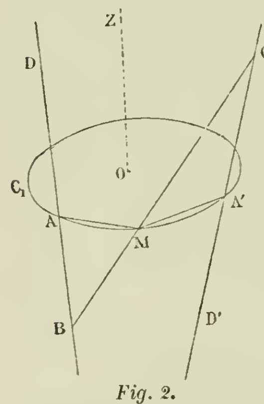


Fig. 2.

3° Les droites G décrivent, autour de OZ, un hyperboloïde de révolution; la troisième partie de la question revient donc à la recherche des sphères tangentes à un plan et inscrites à un hyperboloïde de révolution. La solution de ce problème se trouve dans les ouvrages classiques.

Quant au lieu des traces des droites G sur un plan, c'est la conique, intersection de l'hyperboloïde avec ce plan.

BIBLIOGRAPHIE

Principes de la nouvelle Géométrie du triangle par M. A. Poulain. Brochure in-8° de 46 pages. Editeur Croville-Morant, Paris. Prix 2 fr. 50.

Les *Principes* que vient de faire paraître M. A. Poulain sont le résumé d'une communication de l'auteur au *Congrès scientifique international des Catholiques*, tenu à Paris du 1er au 6 avril 1891 : ils forment un excellent traité sur la Géométrie du triangle.

M. Poulain ne s'est pas contenté de traiter les diverses questions, qu'il aborde dans son ouvrage, par la méthode purement géométrique, il s'est servi des notions élémentaires de la Géométrie analytique qui souvent simplifient considérablement les démonstrations et jettent une vive lumière sur l'ensemble des propriétés du triangle. Les coordonnées normales, barycentriques, tripolaires, surlatérales, angulaires y jouent tour à tour un rôle important, et M. Poulain a mis en lumière tous les avantages que l'on peut tirer, pour l'élégance de la démonstration et la simplicité des calculs, de l'emploi de tel ou tel système de coordonnées.

L'ouvrage que nous analysons ici ne comporte que l'étude des points et droites remarquables du plan du triangle et quelques notions sur le cercle de Brocard. L'auteur s'est, en effet, proposé de donner seulement des *Principes* permettant aux lecteurs, peu au courant de cette nouvelle science, de s'initier rapidement à son étude : il y a pleinement réussi. Si la lecture du travail de M. Poulain est indispensable aux *commençants*, elle n'en est pas moins utile à ceux qui sont déjà familiarisés avec l'étude de la Géométrie du triangle : les points de vue nouveaux auxquels l'auteur se place, la diversité des énoncés, les nombreuses formules données, leur permettront de faire une ample moisson et d'augmenter leurs connaissances dans de grandes proportions.

Les principes de la nouvelle Géométrie du triangle sont divisés en dix chapitres. Nous en citerons rapidement le contenu en mettant en *italiques* les passages sur lesquels nous appelons spécialement l'attention de nos lecteurs.

I. Objet de cette géométrie. — Quelques définitions (pp. 1-6).

II. Des coordonnées trilinéaires et barycentriques (pp. 6-11). — Constructions d'un point dont on donne les coordonnées (x, y, z) ou (α, β, γ). *Cinq méthodes pour calculer* x, y, z *ou* α, β, γ. Applications. Passage des coordonnées trilatères aux coordonnées Cartésiennes.

III. Quelques équations trilatères (pp. 11-16). — Equations et constructions de droites remarquables. *Droite de l'infini.* Equation générale des cercles et des coniques. *Correspondance de droites et de points. Triangles homologiques.*

IV. Des points réciproques et des points inverses (pp. 16-20). — *Théorèmes divers.* Applications. *Construction de la polaire trilinéaire d'un point donné par ses coordonnées.*

V. Enumération des points dérivés d'un ou plusieurs autres à l'aide de leurs coordonnées trilatères (pp. 20-29), *Point factorien.* Points dérivés

d'un seul point M : cinq transformations (Points réciproques, algébriquement associés, isobariques, brocardiens, *permutiens et semi-permutiens*, Complémentaires....) *Construction d'un point à l'infini.*

Nous voyons paraître, pour la première fois, le terme de *point factorien* et nous devons, à ce sujet, donner quelques explications.

Étant donnés deux points $M_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ et $M_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$; le point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ dont les coordonnées seront déterminées par

$$\alpha : \beta : \gamma = \alpha_0\alpha_1 : \beta_0\beta_1 : \gamma_0\gamma_1$$

sera le *factorien* de M_0 et M_1. Ce terme était utile, et il rendra de grands services dans la théorie des alignements. Il permet en outre d'énoncer une multitude de propositions nouvelles et de conduire directement à l'étude de points remarquables dont on ne s'est pas encore occupé, peut-être par ce seul fait qu'on ne pouvait pas les désigner.

VI. — Des coordonnées tripolaires et angulaires (pp. 29-33). *Coordonnées cotripolaires. Démonstration géométrique rigoureuse de l'existence des points Brocard. Avantages des coordonnées surlatérales.* Ce chapitre contient de nombreuses formules dont la plupart sont nouvelles.

VII.— Énumération des points dérivés de M, a l'aide de ses coordonnées tripolaires et angulaires (pp. 33-36). Centres isologiques et isodynamiques. Points jumeaux. Formules.

VIII. — Angles et distances (pp. 34-40). *Distances de deux points. Formules générales de transformations permettant de changer de triangle de référence.* Coordonnées tangentielles. Ce chapitre renferme de nombreuses formules nouvelles, de la plus grande utilité.

IX. — Méthode pour démontrer les théorèmes. (pp. 40-43). Méthodes à suivre pour démontrer que trois points sont en ligne droite ou que trois droites sont concourantes. Applications. *Utilité des points factoriens.* (Voir chap. V.)

X. — Encore quelques points et quelques lignes remarquables (pp. 43-46). *Cercle de Brocard, premier et second triangle de Brocard.* Points cycliques. Droites isotropes. Ce chapitre présente cette particularité curieuse que presque tous les théorèmes sur le cercle de Brocard sont énoncés et démontrés en une page et demie.

Comme le montre le rapide résumé que nous venons de donner, l'ouvrage de M. Poulain contient les parties les plus élémentaires et les plus essentielles de la Géométrie du triangle. Il est clairement rédigé et fort bien imprimé ; de nombreuses figures, intercalées dans le texte, en facilitent la lecture. Nous ne craignons pas de dire qu'au point de vue élémentaire et pratique *c'est un des meilleurs ouvrages sur le triangle qui aient été publiés.* Il sera lu avec fruit par tous ceux qui s'intéressent à la Géométrie du triangle et nous ne saurions trop le recommander.

E. Vigarié.

CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

PRÉPARANT A LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROGRAMME (*) DU COURS DE MATHÉMATIQUES

Arithmétique.

Restes de la division d'un nombre entier par 2, 5 ; 4, 25 ; 8, 125 ; 9, 3 ; 11. Caractères de divisibilité par chacun de ces nombres. — Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres. — Nombres premiers entre eux. — Plus petit commun multiple de plusieurs nombres.

Nombres premiers. — Propriétés élémentaires. — Décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers.— Composition du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de plusieurs nombres entiers décomposés en facteurs premiers.

Théorème de Fermat ; théorème de Wilson. — Nombre des entiers premiers avec un nombre entier donné et inférieur à ce nombre.

Géométrie.

Revision de la géométrie plane. — Pour les deux premiers livres, on se bornera à une revision rapide en insistant sur les divisions fondamentales et sur l'ordre des théorèmes. — Pour le troisième et le quatrième livre, on reprendra les théories des triangles semblables, des figures homothétiques, des polygones semblables et on fera l'étude des polygones réguliers convexes et non convexes.

Géométrie de l'espace. — Étude complète du cinquième livre. — Mesure des volumes des polyèdres (revision) — Étude des figures homothétiques et des polyèdres semblables.— Figures symétriques (revision).— Surface et volume du cylindre et du cône (revision).

Géométrie de la sphère. — Sections planes. — Grands et petits cercles; pôles d'un cercle. — Plan tangent à la sphère. — Positions relatives de deux sphères. — Angle de deux grands cercles. — Conditions pour qu'un grand cercle soit perpendiculaire à un autre cercle. — Triangles sphériques, polygones sphériques. — Plus court chemin entre deux points sur la sphère.—Arcs de grand cercle perpendiculaires ou obliques menés d'un point de la sphère à un cercle de cette sphère. — Mener par un point un grand cercle tangent à un petit cercle.— Mener un grand cercle tangent à deux petits cercles.

Aire et volume de la sphère (revision). — Sphère passant par quatre points. — Sphères tangentes à quatre plans.

(*) Programme officiel.

Géométrie descriptive.

Développer à nouveau tout le programme de la classe de mathématiques élémentaires, sauf ce qui concerne l'hélice, et y ajouter les questions suivantes :

Intersection de deux polyèdres.

Sphère. — Sections planes, intersection d'une droite et d'une sphère.— Plans tangents à la sphère, menés par une droite. — Cône circonscrit à la sphère.

Construction des angles trièdres.

Cylindre et cône. — Plans tangents, sections planes. — Théorème de Dandelin.

Les élèves devront être sérieusement exercés à l'exécution des épures.

Algèbre.

Division de deux polynômes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre.

Arrangements, permutations, combinaisons. — Binôme de Newton. — Somme des carrés et somme des cubes des n premiers nombres entiers.

Notions élémentaires sur les déterminants.

Équations du premier degré. — Systèmes équivalents. — Résolution d'un système de n équations du premier degré à n inconnues.

Calcul des radicaux.— Exposants fractionnaires.— Exposants négatifs.

Théorie des expressions imaginaires.

Équations du second degré. — Équation bicarrée. — Condition pour que deux équations du second degré aient une racine commune.

Notions élémentaires sur les séries. — Séries convergentes, séries divergentes. — Condition pour qu'une progression géométrique soit une série convergente.

Une série à termes positifs est convergente quand, à partir d'un certain rang, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste constamment inférieur à un nombre fixe moindre que l'unité; elle est divergente quand, à partir d'un certain rang, ce rapport reste constamment supérieur à l'unité.

Séries dont tous les termes n'ont pas le même signe; série des modules. — Une série dont tous les termes n'ont pas le même signe est convergente si la série des modules est convergente.

Séries dont les termes, à partir d'un certain rang, sont alternativement positifs et négatifs.

Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quand m croît indéfiniment.

Étude de la fonction a^x, a étant un nombre positif.

Théorie des logarithmes considérés comme exposants.

Théorie élémentaire des dérivées. — Développement, suivant les puissances croissantes de h, d'un polynôme entier en x dans lequel on remplace x par $x+h$. — Dérivée d'une fonction entière. — Dérivée des différents ordres d'une fonction entière.

Extension de la notion de dérivée à une fonction qui n'est pas entière. — Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Dérivées des fonctions simples suivantes : x^m, a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, tang x, arc sin x, arc cos x, arc tang x.

Dérivée d'une fonction de fonction ; exemples. — Formule des accroissements finis. — Dérivée d'une fonction composée ; dérivée d'une fonction implicite. — Application des dérivées à l'étude d'une fonction d'une seule variable. — Exercices.

Propriétés générales des équations algébriques. (On admettra sans démonstration que toute équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires de la forme $a+bi$ a une racine de cette forme). — Nombre des racines d'une équation algébrique. — Relations entre les coefficients et les racines. — Propriétés spéciales des équations algébriques à coefficients réels : Racines imaginaires conjuguées, indications que fournissent les signes des résultats de la substitution de deux nombres réels.

Trigonométrie.

Fonctions circulaires. — Arcs correspondant à une fonction circulaire donnée. — Relations entre les fonctions circulaires d'un même arc.

Théorie des projections. — Addition des arcs. — Multiplication des arcs, expression de $\cos ma$ et de $\sin ma$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$; expression de tang ma en fonction de tang a.

Toutes les lignes trigonométriques d'un arc a s'expriment rationnellement en fonction de $\frac{a}{2}$.

Division des arcs : Connaissant $\cos a$, ou $\sin a$, calculer $\sin \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{a}{2}$; connaissant tang a calculer tang $\frac{a}{2}$.

Transformer en produit la somme ou la différence de deux sinus, de deux cosinus, de deux tangentes.

Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro. L'arc x étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, on a $x > \sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

Usage des tables trigonométriques à 7 décimales.

Manière de rendre calculables par logarithmes des expressions de la forme $a+b$. — Application à la résolution trigonométrique de l'équation du second degré et à la résolution de quelques équations trigonométriques simples.

Relations entre les angles et les côtés d'un triangle. — Résolution des triangles.

Géométrie analytique.

Construction des expressions algébriques. — Coordonnées rectilignes ; leur transformation. — Distance de deux points.

Théorie analytique de la ligne droite. — Problèmes principaux. — Rapport

anharmonique de quatre points en ligne droite; rapport anharmonique de quatre droites concourantes; condition pour que les quatre points forment une division harmonique; condition pour que les quatre droites forment un faisceau harmonique. — Pôle et polaire par rapport à un système de deux droites. — Quadrilatère complet.

Théorie analytique du cercle. — Équation du cercle. — Équation de la tangente. — Pôle et polaire par rapport au cercle. — Axe radical de deux cercles. — Centre radical de trois cercles. — Cercles orthogonaux. — Transformation des figures par rayons vecteurs réciproques. — Applications.

Equation de la tangente à une courbe en un point donné.

Asymptotes. — Définition.

Asymptotes parallèles à l'axe des y. (On se bornera à démontrer qu'on les obtient en cherchant les valeurs finies de x pour lesquelles y est infini). Applications.

Asymptotes non parallèles à l'axe des y. — Détermination de leur coefficient angulaire c et de leur ordonnée à l'origine d. (On se bornera à démontrer que l'on a

$$c = \lim \frac{y}{x}, \qquad d = \lim (y - cx)$$

pour x infini). Applications.

Courbes du second degré. — Classer les courbes représentées par l'équation du second degré à deux variables en résolvant cette équation par rapport à l'une des variables. — Nombreux exercices.

Réduction de l'équation générale du second degré par la transformation des coordonnées.

Genre ellipse ou hyperbole. — 1° Réduction de l'équation à la forme $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = o$. — Centre, équations du centre; 2° Réduction de l'équation à la forme $Ax^2 + Cy^2 + F = o$, en supposant les axes rectangulaires.

Genre parabole. — Réduction de l'équation à la forme $Cy^2 + 2Dx = o$, en supposant les axes rectangulaires.

Etude des courbes du second degré sur les équations réduites.

Ellipse. — Discussion de l'équation réduite. — Montrer que l'ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale d'un cercle. — Application à la démonstration de quelques propriétés de l'ellipse. — Tangentes : tangente en un point, tangentes parallèles à une direction donnée, tangentes issues d'un point donné. — Normales : normale en un point, normales parallèles à une direction donnée.

Diamètres. — Diamètres conjugués. — Equation de l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués. — Construction des axes d'une ellipse connaissant deux diam tres conjugués en grandeur et en position.

Hyperbole. — Discussion de l'équation réduite. — Asymptotes. — Hyperboles équilatères. — Tangentes : tangente en un point, tangentes parallèles à une direction donnée, tangentes issues d'un point donné. — Normales : Normale en un point, normales parallèles à une direction donnée. — Diamètres : diamètres réels, diamètres imaginaires. — Hyperboles conjuguées. — Diamètres conjugués. — Equation de l'hyperbole

rapportée à deux diamètres conjugués. — Construction des axes d'une hyperbole connaissant deux diamètres conjugués en grandeur et en position. — Construction par points d'une hyperbole connaissant les asymptotes et un point de la courbe.

Parabole. — Discussion de l'équation réduite. — Tangentes : tangente en un point, tangente parallèle à une direction donnée, tangentes issues d'un point donné. — Sous-tangente. — Normales : normale en un point, normale parallèle à une direction donnée. — Sous-normale. — Diamètres. — Equation de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Foyers et directrices. — Détermination des foyers et des directrices des courbes du second degré en se servant des équations réduites.

Divisions homographiques. — Faisceaux homographiques. — Involution. — Lieu du point de rencontre des rayons homologues de deux faisceaux homographiques. — Application à la résolution de quelques problèmes concernant les courbes du second degré.

AVIS AUX PROFESSEURS

Le but de la classe, pour laquelle est fait ce programme, étant de mettre les élèves en état de suivre avec fruit le cours de mathématiques spéciales, les professeurs chargés de cette classe sont invités à ne pas sortir des limites de ce programme et même à ne le développer complètement qu'autant que l'état de préparation de leurs élèves leur permettra de le faire d'une façon utile.

On les engage à employer tout le temps qui restera disponible à exercer les élèves à la discussion des fonctions et à la recherche des lieux géométriques.

QUESTION 399

Solution par M. Ch. MICHEL.

Soit AB, *une corde mobile,* PARALLÈLE A UNE DIRECTION FIXE (*), *dans une circonférence* Δ, *de rayon* R. *Sur* AB *on prend un point* I *tel que*

$$\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + K\overline{AB}^2 = 2(1 + 2K)R^2;$$

K *désignant une constante donnée.*

Trouver le lieu décrit par ce point I.

(*) M. Ch. Michel m'avait présenté la question dans deux cas particuliers qui correspondent aux hypothèses $K = 0$, $K = 1$. En généralisant la question qu'il me proposait, j'ai, dans ma rédaction, oublié les mots *parallèle à une direction fixe* qui étaient essentiels. Cet oubli a rendu l'énoncé inintelligible. G. L.

Prenons I à l'intérieur de Δ. Soit CC′ la symétrique de B, par rapport à OI; posons

$$\alpha = \widehat{AOC} - \widehat{AIC}.$$

On a

$$\overline{AC}^2 = 2R^2(1 - \cos\alpha) = \overline{AI}^2 + \overline{IB}^2 - 2AI.IB\cos\alpha;$$

d'où

$$\overline{AI}^2 + \overline{IB}^2 - 2R^2 = 2\cos\alpha(AI.IB - R^2).$$

Or $$AB = AI + IB.$$

La relation de l'énoncé donne

$$(K+1)\overline{AI}^2 + \overline{IB}^2 - 2R^2) = -2K(AI.IB - R^2).$$

Donc $$\cos\alpha = \text{constante}.$$

Or $$x = 2OIM, \text{etc.}$$

QUESTION 406

Solution par Madame Ve F. Prime.

DE *étant une corde de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC*;* F, G *les points de rencontre de* DB, DC *avec une sécante variable* AZ*;* H, K *les points où les parallèles à* DE, *menées par* F, G, *rencontrent* AE. *Quel est le lieu de l'intersection* M *des droites* BH, CK, *lorsque* AZ *tourne autour de* A.

(Bernès.)

Il est visible que les droites BH et CK décrivent des faisceaux homographiques; le lieu du point M est donc une conique passant par les points B, C. Le point M prenant les positions particulières A, D, E lorsque la sécante AZ est parallèle à DE ou coïncide avec une des droites AE et AD, la conique lieu de M a cinq points communs avec la circonférence BBC; par suite, elle ne peut différer de cette circonférence.

Nota. — M. Sollertinsky nous a adressé une solution toute semblable.

QUESTION 409

Solution par M. B. Sollertinsky.

Sur deux droites données, issues du sommet A *du triangle* ABC, *déterminer un couple de points* antigonaux *(ou jumeaux).*

(Bernès.)

Soient AM, AN les droites données; AM′, AN′ leurs isogonales. Si les bissectrices de l'angle $\widehat{M'AN'}$ rencontrent la circonférence ABC aux points D, D′, le diamètre DD′ rencontrera AM′, AN′ aux points M′, N′, inverses par rapport *au cercle* ABC. Les points M, N inverses (isogonaux) de M′, N′ par rapport *au triangle* ABC, sont les points jumeaux. (Voir de la Note M. *Neuberg*, sur les projections, etc., 1890, 14, §§ 15.)

QUESTION 410

Solution par M. B. Sollertinsky.

Si sur deux droites antiparallèles relativement à l'angle A *du triangle* ABC *et issues du sommet* A, *on considère deux couples de points inverses* M *et* M′, N *et* N′, *le second point d'intersection des circonférences* AMN′, ANM′ *est sur la circonférence* ABC.

(Bernès.)

Soient P, P′ les points où les droites AM, AM′ rencontrent la circonférence ABC. En supposant le point N situé sur la droite AM, on a

$$(\mathrm{MNP}\infty) = (\mathrm{M'N'}\infty\,\mathrm{P'}) = (\mathrm{N'M'P'}\infty),$$

ou

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PN}} = \frac{\mathrm{P'N'}}{\mathrm{P'M'}}.$$

De là, il résulte que les circonférences APP′, AMN′, ANM′ concourent au même point S, centre de similitude des divisions PMN, P′N′M′.

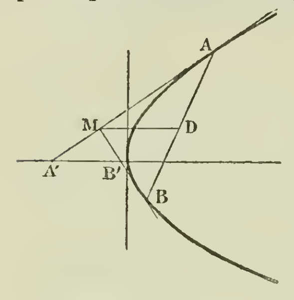
QUESTION 398

Solution par M. Baudran, élève au lycée de Rouen.

D'un point M *on mène, à une parabole* P, *des tangentes* MA, MB *qui coupent l'axe de cette parabole respectivement aux points* A′, B′. *Démontrer que*

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MA'}{MB'}.$$

(G. L.)



La médiane MD du triangle AMB est parallèle à l'axe. Or, dans un triangle, toute parallèle A′B′ à la médiane intercepte sur les côtés correspondants des segments proportionnels à ces côtés (*). La proposition se trouve ainsi démontrée.

Nota. — Solutions diverses par Mme veuve F. Prime, à Bruxelles; G. Russo, à Catanzaro; Charles Michel, élève au collège Chaptal; W. J. Greenstreet; M. A. B. Sollertinsky; C. Grolleau, maître-répétiteur au lycée de Marseille.

QUESTION 397

Solution, par M. G. Russo, à Catanzaro.

On donne une circonférence et l'un de ses diamètres ah. *D'un point* n, *pris arbitrairement sur la circonféremce donnée, comme centre, avec* ob *pour rayon, on décrit un arc de cercle. Cet arc coupe en* c *le diamètre* ah *et en* d *la circonférence donnée. Démontrer que la droite* cd *est perpendiculaire à la droite* ao.

(Mannheim.)

(*) On a, en effet,

$$\frac{CD}{DB} = \frac{MB'}{MB}, \qquad \frac{CD}{AC} = \frac{MA'}{MA};$$

or

$$DB = AC,$$

donc

$$\frac{MB'}{MB} = \frac{MA'}{MA}.$$

Le triangle *dob* étant isoscèle, on a

$$\widehat{odb} = \widehat{obd}\,;$$

mais

$$\widehat{odb} = \widehat{oab}\,,$$

comme inscrits dans un même segment ; donc

$$oab = obd\,,$$

Soit oM perpendiculaire sur ab ; on a

$$\widehat{oab} = \widehat{Mob} = \frac{1}{2}\widehat{cob} = \widehat{cdb}\,.$$

Ainsi, les angles *cdb*, *obd* sont égaux ; par suite *cd* est parallèle à *ob*. D'où l'on conclut qu'elle est perpendiculaire sur *oa*.

Autrement (*). — Désignons par *e* le point où le prolongement de *oc* rencontre la circonférence donnée. Les arcs *ob*, *od* étant égaux, l'égalité des angles *c* et *b* du triangle isoscèle *ocb* a pour conséquence l'égalité des arcs *ad*, *ae* ; *oa* est donc la bissectrice de l'angle *doc* et comme le triangle *doc* est isoscèle, *oa* est perpendiculaire sur *dc*.

Nota. — Solutions diverses par MM. B. Sollertinsky ; W. J. Greenstreet ; M. A. ; Ch. Michel, élève au collège Chaptal ; Baudran, élève au lycée de Rouen.

QUESTIONS PROPOSÉES

423. — Si p_a, p_b, p_c, ρ désignent les distances algébriques des points A, B, C, M à la droite harmoniquement associée au point M, par rapport au triangle ABC, on a :

$$\frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_b} + \frac{1}{p_c} = \frac{3}{\rho}\,.$$

(*L. Bénézech.*)

424. — Construire un triangle dont les côtés contiennent les sommets d'un quadrilatère donné et qui soit partagé par les diagonales en quatre parties équivalentes. Il y a une condition de possibilité : la formuler.

(*Lucien Lévy.*)

(*) Cette seconde solution est de Mme Ve Prime, de Bruxelles.

425. — Dans un triangle isoscèle, le rapport de la base à la hauteur est $\frac{9}{8}$. On prend, sur la hauteur, un point qui la divise, à partir de la base, dans le rapport de 3 à 5 ; et par ce point on mène les deux droites qui font, avec la hauteur, des angles de 45°. Démontrer que ces deux droites partagent le triangle en parties équivalentes.

(Lucien Lévy.)

426. — Démontrer que l'équation

$$x^2 = y^2 + z^4$$

admet une infinité de solutions, en nombres entiers ; la somme $x + y$ étant un bicarré (*).

(G. L.)

427. — Sur la médiane *am* d'un triangle *abc*, comme diamètre, on décrit une circonférence de cercle. Cette courbe coupe, au point *g*, le cercle circonscrit au triangle *abc* : démontrer que les droites *ab*, *ac*, *ag* et la hauteur *ah* du triangle forment un faisceau harmonique. *(Mannheim.)*

428. — On donne une circonférence de cercle et les tangentes *sa*, *sb* à cette courbe. Du point *s*, on mène une droite arbitraire qui rencontre la circonférence en *p* et en *q* : démontrer que les distances des points de contact *a*, *b*, aux points *p*, *q* sont proportionnelles ; c'est-à-dire que $\frac{ap}{aq} = \frac{bp}{bq}$.

(Mannheim.)

(*) Ce problème ne doit pas être confondu avec celui qui a été proposé par Fermat, dans une remarque relative au *Traité des doubles égalités* de Bachet.

Le problème de Fermat consiste à *trouver un triangle rectangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, de telle sorte que l'hypoténuse soit un carré parfait, ainsi que la somme des deux côtés de l'angle droit.*

On trouvera une solution de ce problème dans les *Recherches sur l'analyse indéterminée et l'arithmétique de Diophante* (p. 27), par Edouard Lucas.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 27462-12-91.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès,**

(*Suite*, voir page 3.)

Autres propriétés des cercles G, G′. — Ces cercles étant symétriquement inverses, les propriétés du § XIV leur sont applicables; le triangle ABC y remplaçant le triangle AB′C′, puisque l'axe radical est ici BC.

Ainsi : 1° *Les tranformés* g, g′ *des centres* G, G′ *sont symétriques relativement à* BC, *et le cercle* Agg′ *est le cercle d'Apollonius relatif à* A, *dans* ABC; 2° *Les centres* G, G′ *sont conjugués;* 3° *Les deux cercles ont pour centres de similitude les extrémités* σ, σ' *du diamètre perpendiculaire à* BC *en son milieu, dans la circonférence* ABC.

A quoi on peut ajouter cette proposition qui complète le 3°. *Si* I, I_a, I_b, I_c *sont les centres du cercle inscrit et d'un cercle ex-inscrit, les points des circonférences* G, G′ *sont deux à deux conjugués relativement au cercle décrit sur* I I_a *comme diamètre, et aussi deux à deux conjugués relativement au cercle qui aurait pour diamètre* I_b I_c. En effet, ces deux cercles ont pour centres σ, σ' et pour rayons σB, σ'B. Or les cercles G, G′ sont inverses l'un de l'autre relativement à chacun de leurs centres de similitude σ, σ' ; et comme B y est son propre inverse, les puissances d'inversion sont $\overline{\sigma B}^2$, $\overline{\sigma' B}^2$.

Remarquons en outre que le 2° résulte directement de ce que AG, AG′ étant des droites isogonales ainsi que AH et AO, les angles HAG′, GAO sont égaux et par suite $\widehat{GAO} = \widehat{OG'A}$; ainsi, AG, AG′ sont antiparallèles relativement à l'angle AOG et G et G′ sont deux points conjugués. La première partie de 1° en est une conséquence, et la deuxième résulte de ce que le cercle d'Apollonius, relatif à A, dans ABC est le transformé de la droite GG′ perpendiculaire à BC en son milieu (*); par suite il se confond avec le cercle A*gg*′.

(*) Cette transformation est signalée dans le mémoire de M. Gob.

Nous allons maintenant établir les deux relations

$$\frac{OG}{R} = \frac{AM}{AM'}, \frac{AM}{AM'} = \frac{\rho}{\rho'}$$

dont la seconde a été énoncée au § XIV, mais non démontrée.

Remarque préliminaire. — Soient A'B'C' un triangle quelconque dont les angles A', B', C' sont définis à $K\pi$ près comme il a été dit, O' le centre de la circonférence A'B'C', D' le milieu de B'C'. *On a toujours, en grandeur et en signe* $(O'D', O'C') = A'$. Car si c'T' est la tangente, en C', à cette circonférence :

$$A' = (A'B', A'C') = (C'B', C'T').$$

Or $$(O'D', B'C') = \frac{\pi}{2} = (O'C', C'T'),$$

d'où $$(O'D', O'C') = (B''C', C'T') = A'.$$

Relation $\frac{OG}{R} = \frac{AM}{AM'}$ *établie en grandeur et en signe.* — Si λ, λ' désignent les angles (MB, MC), (M'B, M'C), les trois angles du triangle CGC sont (OG, OC) = A (d'après la remarque précédente, (GC, GO) = — (GO, GC) = — λ (d'après la même remarque) ; par suite, (CO, CG) = λ — A. D'autre part, F étant, comme plus haut, le point où le cercle G rencontre AB, il est visible que le triangle AFC a aussi pour angles A, — λ, λ — A.

De là résulte : $$\frac{AF}{b} = \frac{OG}{R}.$$

Or, si m' est le transformé de M' ou l'isocyclique de M, $AM.Am' = AF.AB$, ou

$$\frac{AM}{AM'} \cdot bc = c.AF.$$

Par conséquent

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{AF}{b} = \frac{OG}{R}.$$

Mais on voit que la longueur AF, nulle lorsque G est en O, change de sens en même temps que OG; par suite si l'on considère OG comme positif ou négatif, selon qu'il a le sens de la hauteur AH_a, ou le sens contraire, le sens positif de AF étant le sens de AB, l'égalité $\frac{AF}{b} = \frac{OG}{R}$ a lieu en grandeur et en signe, et l'on en conclut qu'il en est de même de l'égalité

$$\frac{OG}{R} = \frac{AM}{AM'},$$

le rapport $$\frac{AM}{AM'} = \frac{AM.Am'}{bc}$$

étant positif ou négatif selon que A est extérieur ou intérieur à la circonférence G (ou G′, pour la même raison).

Une démonstration plus directe résulte de ce que d'après un théorème déja invoqué (§ XIII) la puissance de A, relativement à la circonférence G, la quantité AM.Am' est égale à $2OGh$, le signe de OG étant défini comme il vient d'être dit. De là, il résulte :

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{OG}{R}.$$

Une conséquence importante est que le lieu du point M pour lequel $\frac{AM}{AM'}$ a une valeur K, donnée en grandeur et en signe, ne comprend que la circonférence unique passant par B et C et dont le centre G est défini sur OD par $OG = K.R$. Le centre du lieu de M′ est de même défini par $OG' = \frac{R}{K}$. Mêmes lieux pour les transformées m, m'.

Remarque. — L'égalité $\frac{OG}{R} = \frac{AM}{AM'}$ et l'égalité corrélative $\frac{OG'}{R} = \frac{AM'}{AM}$ donnent $OG, OG' = R^2$ et suffisent à prouver que G et G′ sont conjugués. Toutefois, si l'on n'avait pas égard aux signes, il serait nécessaire de montrer que G et G′ sont du même côté de O ; fait évident *a priori*, car AG, AG′ et AO, AH_a étant deux couples de droites isogonales, ou bien AG, AG′ sont intérieures à l'angle H_aAO et alors OG, OG′ ont le sens AH_a, ou bien AG, AG′ sont extérieures à cet angle et alors OG, OG′ ont le sens contraire du sens AH_a.

Relation $\frac{AM}{AM'} = \frac{\rho}{\rho'}$. — Il a été vu que AG, AG′ sont antiparallèles relativement à l'angle AOG; d'où résulte

$$\frac{OG}{R} = \frac{AG}{G'}.$$

Mais $$\frac{AG}{AG'} = \frac{\rho}{\rho'},$$ donc $$\frac{AM}{AM'} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Ou bien encore, G, G′ étant conjugués, CG, CG′ sont antiparallèles relativement à l'angle COG, et

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{OG}{R} = \frac{AM}{AM'}.$$

Conséquences. — Les triangles GAM, G′AM′ ayant leurs trois côtés proportionnels ont leurs angles égaux au signe près; et comme $\widehat{GAM}$, $\widehat{G'AM'}$ sont de signes contraires, les angles au centre AGM, AG′M′ sont égaux et de signes contraires. Ce qui montre quelle est la position relative des points isogonaux M, M′ sur les circonférences G, G′. On en conclut qu'un arc quelconque MM_1 de la circonférence G et l'arc $M'M_1'$ déterminé sur G′ par les points isogonaux, sont symétriquement semblables. Tels sont les arcs Mm', et $M'm$.

Lorsque M est sur AG, M′ est sur AG′; et comme

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{AG}{AG'},$$

MM′ est parallèle à GG′, c'est-à-dire perpendiculaire à BC. De même mm'.

Quand $OG = \pm R$, les deux cercles G, G′ se confondent Pour $OG=R$ ils coïncident avec le cercle décrit sur II_a comme diamètre, et pour $OG = -R$, avec le cercle qui a pour diamètre I_bI_c (I, I_a, I_b, I_c étant les centres des cercles tangents à ABC). On a alors $AM = AM'$; et comme AG est bissectrice de l'angle A, les points isogonaux M, M′ sont symétriques relativement à AG.

Théorème réciproque. — *Deux cercles quelconques, symétriquement inverses* G, G′, *et dont les centres* G, G′ *sont sur la perpendiculaire* OD *à* BC *en son milieu passent par* B *et* C ; *de plus, à tout point* M *de l'un correspond, sur l'autre, un point* M′ *isogonal de* M.

L'axe radical X des cercles G, G′ étant parallèle à BC, le cercle x, transformé de X, est tangent, en A, au cercle ABC. De plus, d'après le § XIV (théorèmes 2, 2°), ce cercle a son centre sur GG′ ou OD ; donc il se confond avec le cercle ABC et X se confond avec BC. Mais, d'après ce même théorème, les cercles x et G ont pour axe radical X; donc BC est l'axe radical des

cercles G et ABC ; et celui-ci, passant par B et C, il en est de même du cercle G. Et de même pour le cercle G′. En outre, au point M du cercle G correspond sur le cercle G′ son transformé m. Donc M′, isocyclique de m, est sur le cercle G′.

Sans recourir au § XIV, on pourrait prouver, comme il suit, que les cercles G et ABC ont BC pour axe radical. De ce que G et G′ sont symétriquement inverses, il résulte que AG, AG′ sont deux droites isogonales, et par suite sont antiparallèles relativement à l'angle AOG. D'où

$$\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AG'}} = \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{R}}.$$

Or $$\mathrm{A_G} = \mathrm{AG}.\mathrm{A}g' = bc\,\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AG'}}.$$

Donc $$\mathrm{A_G} = 2h.\mathrm{OG}.$$

Mais, d'après le théorème sur l'axe radical, rappelé au § XIII, si δ est la distance du point A à l'axe radical des cercles G et ABC, $\mathrm{A_G} = 2\delta.\mathrm{OG}$. Donc $\delta = h$, c'est-à-dire que l'axe radical des cercles G et ABC est BC.

Théorème. — *Si* M, M′ *étant deux points isogonaux, on considère les trois cercles* MBC, MCA, MAB *et les trois cercles* M′BC, M′CA, M′AB, *les rayons* ρ, ρ_1, ρ_2, *des trois premiers sont inversement proportionnels aux coordonnées tripolaires de* M′, *et les rayons* ρ', ρ'_1, ρ'_2 *des trois autres sont inversement proportionnels aux coordonnées tripolaires de* M. *Plus explicitement, les six produits* ρAM′, ρ_1BM′, ρ_2CM′, ρ'AM, ρ'_1BM, ρ'_2CM *sont égaux : leur valeur commune est* 2Rr ; R *désignant le rayon du cercle circonscrit aux podaires de* M *et* M′ *relativement à* ABC.

Considérons le triangle IRK formé par le milieu I de AM, le sommet R du podaire PQR de M, et le milieu K de MM′ qui est le centre du cercle circonscrit à PQR. Le point I est le centre du cercle ARQ et IK parallèle à AM′ est perpendiculaire à RQ ; donc, d'après la remarque préliminaire (IR, IK) = A, le troisième angle (KI, KR) pour la même raison égale l'angle P du podaire, c'est-à-dire, λ — A, et par suite le deuxième angle est — λ. Donc ce triangle IRK est directement semblable

à OGC et donne

$$\frac{OC}{IK} = \frac{GC}{RK} \quad \text{ou} \quad \frac{2R}{AM'} = \frac{\rho}{r} \quad \text{ou} \quad \rho AM' = 2Rr;$$

puis

$$\rho AM' = \rho_1 BM' = \rho_2 CM' = \rho' AM = \rho_1' BM = \rho_2' CM = 2Rr.$$

Application du théorème. — Si l'on propose de construire un point M tel que les rayons ρ, ρ_1, ρ_2 des cercles MBC, MCA, MAB soient proportionnels à trois quantités données, on voit qu'il suffit de construire le point M′ dont les coordonnées tripolaires soient proportionnelles aux inverses de ces quantités, ce qui donne deux points conjugués M′, M_1', et de prendre les isogonaux M, M_1 de ces deux points. On a ainsi deux solutions, qui peuvent, comme on sait, se réduire à une, ou être imaginaires. Ces deux points M, M_1 étant les isogonaux de deux points conjugués sont isoptiques, et les rayons qui leur correspondent sont, non seulement proportionnels, mais égaux. D'où cette conséquence que, pour les deux points conjugués M′, M_1' les rayons r, r_1 des podaires sont proportionnels aux coordonnées tripolaires de M′, M_1', en vertu des égalités $\rho . AM' = 2Rr$ et $\rho . AM_1' = 2Rr_1$. Mais cela résulte déjà plus simplement de ce que ces podaires sont semblables et que les côtés homologues des podaires de deux points quelconques sont proportionnels aux coordonnées tripolaires correspondantes de ces deux points.

Corollaire formé par inversion. — *Si* M *et* M′ *étant deux points isogonaux,* g, g′ *sont les transformés des centres* G, G′ *des cercles* MBC, M′BC *et que* g_1, g_2, g_1', g_2' *soient les symétriques de* A *relativement aux droites* BM, CM, BM′, CM′ *et que* t *désigne la valeur commune des rapports* $\frac{\rho}{AG}$, $\frac{\rho'}{AG'}$, *les distances* Ag, Ag_1, Ag_2, Ag′, Ag_1', Ag_2' *sont proportionnelles à* t.AM′, BM′, CM′, t.AM, BM, CM *et la valeur commune des six rapports égaux est égale à* $\frac{r}{h}$.

On voit d'abord que g_1, g_2, g_1', g_2' sont les transformés des centres G_1, G_2, G G_2'.

Puis $\rho = \text{GB} = \dfrac{bc.g\text{C}}{\text{A}g.\text{AC}}$ ou $\rho = bc\dfrac{t}{\text{A}g}$.

de même $\rho' = bc\dfrac{t}{\text{A}g}$.

Puis $\rho_1 = \text{G}_1\text{A} = \dfrac{bc}{\text{A}g_1}$ etc.

Donc

$$\frac{t.\text{AM}'}{\text{A}g} = \frac{\text{BM}'}{\text{A}g_1} = \frac{\text{CM}'}{\text{A}g_2} = \frac{t.\text{AM}}{\text{A}g'} = \frac{\text{BM}}{\text{A}g'_1} = \frac{\text{CM}}{\text{A}g'_2} = \frac{r}{h}.$$

(A suivre.)

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME
TRÈS GÉNÉRAL SUR LES LIMITES

Par M. Maurice **Fouché**, professeur à Sainte-Barbe.

On doit à M. Jablonski un théorème très général sur les limites et d'une extrême commodité dans presque toutes les questions des limites qui se rencontrent dans le programme de la classe de Mathématiques élémentaires; questions qu'on doit traiter sans le secours de la théorie des infiniment petits.

Ce théorème consiste en ce que, si deux suites de quantités $a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots$ et $b_1, b_2, b_3, \dots b_n \dots$ sont telles que : 1° a_i soit toujours plus petit que b_j, quels que soient les indices; et 2° la différence $b_n - a_n$ tende vers o quand n augmente indéfiniment; les éléments des deux suites tendent vers une limite commune quand l'indice augmente indéfiniment.

La démonstration qu'on trouve dans l'ouvrage de M. Jablonski *(Compléments d'algèbre)* peut être modifiée de la manière suivante, laquelle permet d'établir la conclusion en distinguant deux cas au lieu de trois.

Je m'appuie sur les deux propositions suivantes, trop connues pour qu'il y ait lieu d'y insister :

I. Si l'on a une suite de quantités $a_1, a_2, \dots a_n$, telles que chacune d'elles ne soit pas inférieure à la précédente et que toutes soient plus petites qu'une quantité fixe A, ces quantités

tendent vers une limite inférieure ou égale à A lorsqu'on s'avance indéfiniment dans la suite.

Le cas où, à partir d'un certain rang, toutes les quantités a_n resteraient égales entre elles est compris dans l'énoncé précédent : c'est la valeur commune de ces quantités égales qui est alors leur limite.

II. Si deux suites de quantités

$$a_1, a_2 \ldots a_n \ldots \qquad \text{et} \qquad b_1, b_2 \ldots b_n$$

sont telles que $b_n - a_n$ tend vers o, et si les éléments d'une des suites tendent vers une limite, les éléments de l'autre suite tendent vers la même limite.

Cet énoncé comprend encore le cas où les éléments d'une des suites ou ceux des deux suites resteraient égaux entre eux à partir d'un certain rang.

Je considère maintenant deux suites :

$$a_1, a_2, a_3, \ \ldots \ a_n \ \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ \ldots \ b_n \ \ldots$$

telles que :

1° $a_i < b_j$ quel que soit l'indice;

2° $b_n - a_n$ tende vers o quand n augmente indéfiniment.

Je dis que les éléments de ces deux suites tendent vers une même limite.

Si, d'abord, les quantités a sont telles qu'aucune d'elles ne soit inférieure à la précédente, elles rentrent dans le cas de la Proposition I, puisqu'elles sont toutes plus petites que b_i ; et a_n tend vers une limite A. Alors b_n tend vers la même limite A, en vertu de II, puisque $b_n - a_n$ tend vers o par hypothèse.

Si maintenant les quantités a ne satisfont pas à la condition précédente, on substitue à la suite des a une suite

$$a'_1, a'_2 \ldots a'_n \ldots$$

ainsi formée : $a'_1 = a_1$;

si $a_2 \geqslant a'_1$ on posera $a'_2 = a_2$;

si $a_2 \leqslant a'_1$ $a'_2 = a'_1$.

De même :

si $a_3 \geqslant a'_2$ on posera $a'_3 = a_3$;

si $a_3 \leqslant a'_2$ $a'_3 = a'_2$;

et ainsi de suite

Cela revient à écarter, de la suite des a, toute quantité qui est plus petite que la précédente, pour la remplacer par cette quantité précédente. De la sorte, une quantité a_i est toujours ou conservée; ou remplacée par une quantité plus grande, et l'on a dans tous les cas :

$$a'_n \geqslant a_n.$$

Les quantités a étant choisies parmi les quantités données sont toutes plus petites que les quantités b; d'après leur formation, elles vont en croissant, ou tout au moins ne décroissent jamais. On rentre alors dans le cas précédent, et a'_n tend vers une limite.

De plus, comme on a

$$a_n \leqslant a'_n < b_n,$$

on a aussi $$b_n - a'_n \leqslant b_n - a_n$$

et $b_n - a'_n$ tend vers *zéro* comme $b_n - a_n$.

Donc, en vertu de II, b_n tend vers la même limite que a'_n.

Mais $b_n - a_n$ tend vers *zéro*, par hypothèse; donc a_n tend aussi vers la même limite.

C. Q. F. D.

DÉMONSTRATION DIRECTE (*)

DU SECOND THÉORÈME DE GULDIN

Par M. **Léon Vautré.**

Soient α, β, γ, r, les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, du triangle, et de son centre de gravité G, sur l'axe de rotation; a, b, c, les projections, sur cet axe, des côtés BC, CA, AB; S_a, S_b, S_c, les aires des trapèzes compris entre ces côtés et leurs projections; V_a, V_b, V_c, les volumes des corps engendrés par ces trapèzes; ces aires et ces volumes étant considérés comme additifs ou comme soustractifs, en même temps que les projections correspondantes a, b, c; enfin, soient

(*) La démonstration ordinairement donnée (V. Rouché et de Comberousse, 6me édition, § 896, p. 230) consiste à vérifier l'exactitude du théorème en question dans le cas où le triangle tourne autour d'un de ses côtés. On généralise ensuite assez facilement la proposition.

S l'aire du triangle ABC, et V le volume de la figure qu'il engendre.

On a, dans tous les cas :

$$V_a + V_b + V_c = \frac{\pi}{3}[a(\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma)+b(\gamma^2+\alpha^2+\gamma\alpha)+c(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)].$$

La somme $a + b + c$ étant nulle, on n'altère pas le facteur de $\frac{\pi}{3}$, en y ajoutant le produit

$$(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)(a + b + c),$$

ce qui peut se faire en introduisant, dans chacune des trois parenthèses, le triuôme $\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta$. On trouve ainsi :

$$V_a + V_b + V_c = \frac{\pi}{3}(\alpha + \beta + \gamma)[a(\beta + \gamma) + b(\gamma + \alpha) + c(\alpha + \beta),$$

En remplaçant les termes de la parenthèse par leurs valeurs respectives, $2S_a$, $2S_b$, $2S_c$, et la somme $\alpha + \beta + \gamma$ par $3r$, on a

$$V_a + V_b + V_c = 2\pi r(S_a + S_b + S_c).$$

Mais les deux sommes $V_a + V_b + V_c$ et $S_a + S_b + S_c$ ont pour valeurs absolues V et S; de plus, elles sont de même signe.

Finalement on a

$$V = 2\pi r S.$$

Remarque. — On sait comment, le théorème de Guldin étant démontré pour un triangle, on l'étend à une aire plane quelconque tournant autour d'un axe situé dans son plan.

VARIÉTÉS

LES PROGRÈS DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE EN 1891

Par M. **Émile Vigarié.**

(Suite et fin, voir, page 7.)

8. Points et droites de Feuerbach. — M. de Longchamps a étudié les points et les droites de Feuerbach dans une Note publiée dans ce Journal (*J. E.* pp. 106-108) et il en a donné plusieurs propriétés. Ces mêmes éléments ont été ren-

contrés par MM. Lemoine, Kœhler, Boutin et par Steiner (voir *J. E.*, p. 134). M. Boutin, dans une lettre à M. de Longchamps, a signalé de nouvelles propositions.

9. Ellipse de Brocard. — Dans un article *Sur l'ellipse de Brocard* (Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, tome XLIX). M. Catalan a fait une étude complète de cette ellipse remarquable. Après avoir indiqué de nombreuses relations métriques, l'auteur donne les propriétés des principaux points et des principales droites qu'on y rencontre. Le Mémoire se termine par une planche sur laquelle sont représentés les éléments étudiés dans le travail précédent.

10. Coordonnées tripolaires. — En coordonnées tripolaires, toute courbe présente l'inconvénient d'être représentée par une infinité d'équations de degrés différents. De là des difficultés. Il était donc nécessaire de trouver une méthode qui permît d'identifier facilement les courbes définies par leurs équations tripolaires, et d'énoncer aisément les formules qui les concernent. C'est l'avantage que réalisent les *coordonnées tripolaires réversibles* (*J. S.*, pp. 265-276) de M. Poulain.

11. Cercles inverses. — Le chapitre des figures inverses par rapport au triangle de référence vient d'être augmenté par une Note de M. Sollertinsky *Sur les cercles inverses* (*J. E.*, pp. 273-277). L'auteur y donne de très intéressantes propositions.

Nous devons signaler les *Questions de Géométrie projective* de M. Neuberg (*Mathesis*, pp. 90-92, 116-117, 265-271) qui renferment un grand nombre de propositions se rapportant à la géométrie du triangle.

12. Ouvrages publiés. — Cette année, plusieurs volumes ou brochures ont été publiés sur la Géométrie du triangle. Les uns lui sont entièrement consacrés, les autres en contiennent plusieurs chapitres importants. Ces publications ayant été analysées dans ce Journal, nous nous contenterons de les signaler.

1° *Die Brocardschen Gebilde*, par M. le Dr Emmerich (voir *J. E.*, pp. 213-214).

2° *Supplement to Euclid revised*, par M. Nixon (*J. E.*, pp. 87-88).

3° *Sur la Géométrie récente du triangle,* par M. J. Neuberg (*J. E.*, pp. 252-253).

4° *Principes de la Nouvelle Géométrie du triangle,* par M. A. Poulain (*J. E.* 1892, pp. 13-14).

5° *A Treatise on the Geometry of the circle,* par M. M'Clelland (analysé dans le présent numéro).

Annonçons enfin la publication prochaine d'un *Traité de la Géométrie du triangle*, par M. M'Cay et d'une nouvelle édition du *Companion to the Weekly problem papers* de MM. Milne et Simmons.

Les généralisations de la Géométrie du triangle ont été fort peu étudiées, nous avons seulement donné un résumé des recherches faites antérieurement sous le titre de *La generalizaciones de la Géometria del triangulo* (*Progreso matematico*, Octobre et Novembre 1891).

13. — Au dernier congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences (Marseille, septembre 1891), plusieurs mémoires sur la Géométrie du triangle ont été communiqués. Ce sont :

De Longchamps. — *Sur le rayon de courbure des coniques inscrites à un triangle.*

Lemoine. — 1° *Sur la transformation systématique des formules relatives au triangle.*

2° *Divers résultats concernant la Géométrie du triangle.*

Neuberg et Schoute. — *Extension d'un problème connu.*

Nous rendrons compte de ces travaux après la publication des comptes-rendus de l'Association française.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 277, année 1891.)

---

200. — *Sur les points tripolairement associés.*

Soit M. un point dont les coordonnées barycentriques sont : α', β', γ' M rencontre BC en A_1, soient A_2 le conjugué harmonique de A_1 par rapport à BC; B_1, B_2, C_1, C_2 des points analogues.

Les trois cercles de diamètres A_1A_2 B_1B_2, C_1C_2, se coupent aux deux

mêmes points M_T, M'_T, ces deux points sont tripolairement associés, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{AM_T}{AM'_T} = \frac{BM_T}{BM'_T} = \frac{CM_T}{CM'_T}.$$

En effet, la circonférence de diamètre A_1A_2, est le lieu des points d'où l'on voit sous le même angle deux cercles de centre B et C et de rayon $\frac{K}{\beta'}$, $\frac{K}{\gamma'}$. Si M_T est un point du lieu, ω un des angles égaux, on a :

$$BM_T \sin \omega = \frac{K}{\beta'};$$

donc

$$\beta'.BM_T = \gamma'.CM_T = \alpha' AM_T.$$

On aurait les mêmes relations pour M'_T.

Ces deux points M_T, M'_T ont donc leurs distances aux sommets du triangle de référence inversement proportionnelles aux coordonnées barycentriques de M. On peut dire que M_T, M'_T sont tripolairement associés au point M, dont ils se déduisent aisément. Ainsi les centres isodynamiques sont tripolairement associés au centre du cercle inscrit.

Démontrons l'existence de ces points et cherchons l'équation barycentrique de la droite qui les joint.

On calcule aisément : BA_1, CA_1, BA_2, CA_2, et si D est le milieu de A_1A_2, on calcule aussi AD, BD, CD, A_1A_2 et on en déduit pour les puissances de A, B, C, par rapport au cercle de diamètre A_1A_2

$$\text{puissance } A = \frac{b^2\gamma'^2 - c^2\beta'^2}{\gamma'^2 - \beta'^2},$$

$$\text{puissance } B = \frac{a^2\gamma'^2}{\gamma'^2 - \beta'^2},$$

$$\text{puissance } C = \frac{a^2\beta'^2}{\beta'^2 - \gamma'^2},$$

d'où pour l'équation de la circonférence A_1A_2 :

$$[(b^2\gamma'^2 - c^2\beta'^2)\alpha + a^2\gamma'^2\beta - a^2\beta'^2\gamma]\Sigma\alpha - (\gamma'^2 - \beta'^2)\Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

L'équation du cercle C_1C_2 est :

$$[c^2\beta'^2\alpha - c^2\alpha'^2\beta + (a^2\beta'^2 - b^2\alpha'^2)\gamma]\Sigma\alpha - (\beta'^2 - \alpha'^2)\Sigma a^2\beta\gamma = 0,$$

d'où l'on déduit pour l'axe radical de ces deux cercles :

$$\alpha[b^2\gamma'^2(\beta'^2 - \alpha'^2) + c^2\beta'^2(\alpha'^2 - \gamma'^2)] + \beta[a^2\gamma'^2(\beta'^2 - \alpha'^2) + c^2\alpha'^2(\gamma'^2 - \beta'^2)] + \gamma[b^2\gamma'^2(\gamma'^2 - \beta'^2) + a^2\beta'^2(\alpha'^2 - \gamma'^2)] = 0,$$

équation symétrique qui montre que les trois cercles considérés ont même axe radical et par suite se coupent aux deux mêmes points.

On peut constater que cette droite passe constamment par le centre O du cercle circonscrit à ABC.

On sait, en outre, que la perpendiculaire menée à $M_T M'_T$ par son milieu est la droite harmoniquement associée au second potentiel de M :

$$\frac{\alpha}{\alpha'^2} + \frac{\beta}{\beta'^2} + \frac{\gamma}{\gamma'^2} = 0.$$

201. — *Les axes radicaux de chacun des cercles de l'exercice précédent et du cercle circonscrit se coupent en un même point.*

Les équations de deux de ces axes radicaux sont :

$$\alpha(b^2\gamma'^2 - c^2\beta'^2) + a^2\gamma'^2\beta - a^2\beta'^2\gamma = 0$$
$$c^2\beta'^2\alpha - c^2\alpha'^2\beta + (a^2\beta'^2 - b^2\alpha'^2)\gamma = 0$$

ces droites se coupent au point :

$$\frac{\alpha}{a^2\left(\frac{b^2}{\beta'^2}+\frac{c^2}{\gamma'^2}-\frac{a^2}{\alpha'^2}\right)}=\frac{\beta}{b^2\left(\frac{a^2}{\alpha'^2}-\frac{b^2}{\beta'^2}+\frac{c^2}{\gamma'^2}\right)}$$
$$=\frac{\gamma}{c^2\left(\frac{a^2}{\alpha'^2}+\frac{b^2}{\beta'^2}-\frac{c^2}{\gamma'^2}\right)}$$

On constate aisément que ce point est situé sur le troisième axe radical.

BIBLIOGRAPHIE

A Treatise on the Geometry of the circle *and some extensions to conic sections by the method of reciprocation*, par M. William M'Clelland.— 1 vol. xvi+300 pages. Editeurs, MacMillan and C°, à Londres.

En publiant un traité sur la Géométrie du Cercle, M. W. M'Clelland a eu pour but de réunir toutes les théories fondamentales de la Géométrie moderne et de les mettre à la portée des étudiants. Des exemples placés à la suite de *chacune* de ces théories permettent au lecteur de se les assimiler rapidement. Beaucoup de ces exercices sont suivis d'une indication sommaire de la solution.

Cet excellent ouvrage est divisé en quatorze chapitres. Voici un extrait de la table des matières :

Chapitre I (pp. 1-15). — Rapport anharmonique. Théorème d'Euler (*) Enveloppes. Théorèmes de Bobillier, Mannheim, Feuerbach et Hart.

Chapitre II (pp. 15-60). — Maximums et minimums. Théorèmes divers. Méthode des infiniment petits. Propriétés d'un point pris dans le plan d'un triangle. Extension du théorème de Ptolemée. Centre de similitude.

Chapitre III (pp. 60-64). — Géométrie récente.

Chapitre IV (pp. 84-112). — Théorie générale du centre des moyennes distances d'un système de points. Théorème de Weill. Réciproques.

Chapitre V (pp. 112-139). — Points en ligne droite et droites concourantes. Théorèmes et hexagones de Pascal et de Brianchon.

Chapitre VI (pp. 139-149). — Points inverses par rapport à un cercle.

Chapitre VII (pp. 149-173). — Pôles et polaires par rapport à un cercle. Points conjugués. Cercle polaire. Théorème de Salmon. Réciproques.

Chapitre VIII (173-204). — Cercles coaxiaux. Cercle de similitude.

Chapitre IX (pp. 204-219). — Théorie des figures semblables.

Chapitre X (pp. 219-234). — Cercles de similitude et d'antisimilitude.

Chapitre XI (pp. 234-261). — Inversion. Angles et intersection d'une figure avec son inverse.

(*) L'auteur appelle *Théorème d'Euler* la proposition connue sous le nom de *Théorème de Stewart*. Ce théorème fut donné par Stewart en 1763 et utilisé par plusieurs géomètres, tels que R. Simson, Euler et Leslie. Euler, notamment, s'en est servi (*Mémoires de Saint-Pétersbourg* 1780) pour résoudre la question connue sous le nom de *Problème de Castillon*.

Chapitre XII (261-282). — Théorie générale de la section harmonique. Homographie.

Chapitre XIII (pp. 282-293). — Involution. Théorème de Desargues.

Chapitre XIV (pp. 293-296). — Points doubles.

Dans cet ouvrage consacré aux théories de la Géométrie moderne, celles qui se rapportent à la géométrie du triangle devaient nécessairement trouver place. L'auteur a réuni dans un chapitre (chapitre III) les principales propositions de cette géométrie. En dehors de ce chapitre, divisé en trois importantes sections, le volume renferme de nombreuses théories avec leurs applications au triangle. Voici rapidement l'indication des sujets qui y sont traités.

Points inverses et points réciproques (pp. 88-89, 118, 132) : Antiparallèles aux côtés d'un triangle (68-69). Point de Lemoine (31-32, 104-105) ; Symédianes (66-68) ; Points, cercles et triangles de Brocard (60-66, 104-105, 122-123) ; Points de Gergonne et de Nagel (117, 183) ; Point de Tarry (131-132) ; Triangles podaires des points de Brocard (69-71) ; Triangles cosymédians (252) ; Cercles des neuf points (70, 86), d'Apollonius (148), de Tucker (71-73), de Lemoine (74-76), de Taylor (76-83, 89), de Neuberg (131), de M'Cay (211-216). Enfin un chapitre (chapitre IX) est consacré à la théorie des figures semblables (204-210) et à ses applications au cercle de Brocard (210-211) et aux cercles de M'Cay (211-216).

Autant par l'élégance des démonstrations que par la diversité et le nombre des questions qui y sont énoncées, la partie qui a trait à la Géométrie du triangle sera lue avec fruit par tous ceux qui s'intéressent à son développement. Bien que moins complet que les traités publiés en Angleterre par MM. Casey, Milne et Simmons, ce chapitre contient tout ce qui se rapporte à la géométrie élémentaire du point, de la droite et du cercle.

Enfin, nous recommandons spécialement le *Traité de la Géométrie du Cercle* de M. M'Clelland à tous ceux de nos lecteurs qui veulent se mettre en possession des nouvelles méthodes de la Géométrie moderne et en connaitre immédiatement les belles applications. L'ouvrage est clairement et simplement rédigé, il est imprimé avec luxe et de nombreuses figures intercalées dans le texte en rendent la lecture facile et agréable,

E. VIGARIÉ.

Annuaire pour l'an 1892, publié par le Bureau des longitudes, *avec des notices scientifiques*. — Prix : 1 fr. 50 c.

Par rapport à l'*Annuaire* de l'année dernière, nous avons à signaler les changements suivants :

Nous donnons pour la première fois un Tableau de parallaxes stellaires que nous devons à notre confrère M. Lœwy.

Nous donnons également des éléments plus récents des satellites de Saturne, d'après M. H. Struve.

Le Tableau des comètes est tenu au courant par l'addition des comètes parues en 1890.

Le Tableau des comètes périodiques a été très augmenté.

M. Glassenapp a ajouté deux éléments nouveaux d'orbites au Tableau des étoiles doubles.

M. Bossert a revu son Tableau des mouvements propres des étoiles donné pour la première fois l'année dernière, et y a ajouté quelques étoiles ayant de forts mouvements propres.

Relativement à l'heure légale, M. Cornu nous donne un moyen très pratique de corriger l'heure locale.

Pour la partie physique :

M. Cornu a revu et complété son article de l'année dernière sur les spectres stellaires.

Notre confrère a revu et complété l'article concernant le Baromètre. On y trouvera un graphique donnant à vue la correction de température du baromètre, ainsi qu'une méthode pour la réduction des observations à zéro et au niveau de la mer.

M. Cornu nous a donné également une Note sur la longueur de l'onde sonore.

M. Moureaux a revu les Tableaux relatifs au magnétisme terrestre. Il donne, en outre, une Note sur l'anomalie qu'il a constatée dans le bassin de Paris. Cette Note est accompagnée d'une Carte.

Dans la partie géographique et statistique, on a remplacé, pour Paris, les données du recensement de 1886 par celles du recensement de 1891.

Le volume se termine par les Notices suivantes :

Sur la réunion du Comité international permanent pour l'exécution photographique de la Carte du Ciel, en avril 1891, à l'Observatoire de Paris, par le contre-amiral Mouchez ;

Sur la Lune et son accélération séculaire, par M. F. Tisserand ;

Sur la mire lointaine de l'Observatoire de Nice, par M. Cornu ;

Sur la réunion de l'Association géodésique internationale à Florence en 1891, par M. Bouquet de La Grye ;

Sur les Observatoires de montagne, par M. J. Janssen ;

Discours prononcés par MM. l'amiral Paris et Bouquet de La Grye à l'inauguration de la statue de Borda, à Dax, le 24 mai 1891.

(Extrait de l'avertissement.)

SUR LA QUESTION 377

Par M. **Ch. Michel**, élève au Collège Chaptal.

Les égalités considérées dans la question 377 :

$$a\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) + b\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) = 4R,$$

$$b\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) + c\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = 4R,$$

$$c\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) + a\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{-}\right) = 4R.$$

permettent d'établir, simplement, quelques relations entre les éléments du triangle.

1° Si nous ajoutons, membre à membre, les deux premières et la suivante :

$$(b + c - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2r,$$

nous obtenons

$$(a + b + c)\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right) = 2(4R + r).$$

Mais

$$(a + b + c) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2r_a, \text{ etc.}$$

On a donc la relation classique :

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

2° Si nous ajoutons les trois formules, membre à membre, il vient :

$$(a + b + c)\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right)$$
$$+ a \operatorname{tg} \frac{A}{2} + b \operatorname{tg} \frac{B}{2} + c \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 12 R;$$

ou, d'après ce qui précède,

$$a \operatorname{tg} \frac{A}{2} + b \operatorname{tg} \frac{B}{2} + c \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 2(2R - r).$$

Or, $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a}$, etc.

Donc $\sum \frac{p-a}{a} = \frac{2}{r} \cdot (2R - r)$. $\sum \frac{a}{p-a}$

On a aussi

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r_a}{p}, \text{ etc.}$$

Donc $\sum ar_a = 2p(2R - r)$.

Si nous considérons le triangle $I_a I_b I_c$, sa surface a pour mesure

$$\frac{1}{2}(ar_a + br_b + cr_c) + pr, \quad \text{ou} \quad 2pR,$$

d'après la relation précédente.

3° Multiplions les deux membres de la première relation par c, ceux de la seconde par b, ceux de la troisième par a ; ajoutons deux des relations ainsi obtenues ainsi, et retranchons

la troisième, membre à membre. Il nous vient alors les relations suivantes :

$$bc\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = 2R(b + c + a), \text{ etc...}$$

d'où $$abc\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) = 4cR\,(p - c),$$

$$abc\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = 4bR(p - b),$$

$$abc\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = 4aR(p - a);$$

et, en ajoutant

$$abc\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = 2R\sum a\,(p - a),$$

Or,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{4R + r}{p}, \; abc = 4RS = 4Rpr.$$

Donc $$2r(4R + r) = \sum a(p - a).$$

C'est une des formules données par M. Lemoine.

Comme on a

$$a(p - a) + b(p - b) + c(p - c) = 2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

on en déduit

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r\delta. \quad (\delta = r_a + r_b + r_c = 4R + r).$$

4° On a les relations

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{p - b}{r_c}, \; \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{p - a}{r_c},$$

d'où $$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{p - b + p - a}{r_c} = \frac{c}{r_c};$$

et par suite

$$2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = \sum\frac{a}{r_a} = \frac{4(4R + r)}{a + b + c}$$
$$= \frac{2(4R + r)}{p};$$

autre formule indiquée par M. Lemoine.

5° Divisons les deux membres de la première relation par

ab, ceux de la seconde par ac, ceux de la troisième par bc, et ajoutons les trois relations ainsi transformées. Il vient :

$$\frac{1}{b}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)+\frac{1}{c}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)+\frac{1}{a}\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$
$$=2R\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)=\frac{1}{r}.$$

D'ailleurs, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r_a}{p}$, etc

Par suite $\sum\frac{\delta-r_c}{c}=\frac{p}{r}.$

Cette relation permet de calculer l'expression

$$\sum\frac{r_a}{a}.$$

On peut l'établir de plusieurs autres façons simples.

6° En multipliant les trois formules du paragraphe 3°, la première par $p-c$, la seconde par $p-b$, la troisième par $p-a$, et en observant que

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r_a}{p},\ \ldots$$

on obtient :

$$abc(p-c)(r_a+r_b)=4pRc(p-c)^2,$$
$$abc(p-b)(r_a+r_c)=4pRb(p-b)^2,$$
$$abc(p-a)(r_b+r_c)=4pRa(p-a)^2;$$

d'où, en ajoutant,

$$\frac{4pR}{abc}\sum a(p-a)^2=(p-a)(\delta-r_a)+(p-b)(\delta-r_b)+(p-c)(\delta-r_c);$$

ou, en développant le second membre,

$$\frac{4pR}{abc}\sum a(p-a)^2=\sum ar_a=2p(2R-r);$$

et, par suite,

$$\sum a(p-a)^2=2S(2R-r).$$

7° On a

$$\sum r_a(b+c)=\sum r_a(2p-a)=2p\delta-\sum ar_a$$
$$=2pd-2p\,(2R-r)=4p(R+r).$$

Or, en multipliant les formules du paragraphe 3°, la première par c, la seconde par b, la troisième par a, on a

$$a^2 bc(r_b + r_c) = 4p\mathrm{R}a^2(p - a), \text{ etc.}$$

et, par suite

$$abc \sum a(r_b + r_c) = 4p\mathrm{R} \sum a^2(p - a).$$

Or $$\sum a(r_b + r_c) = \sum r_a(b + c) = 4p(\mathrm{R} + r),$$

donc $$\sum a^2(p - a) = 4\mathrm{S}(\mathrm{R} + r);$$

formule signalée par M. Lemoine.

8° On a $$\operatorname{tg}\frac{\mathrm{B}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\mathrm{C}}{2} = \frac{a}{r_a};$$

puis, par substitution dans les formules (paragraphe 3°),

$$abc \cdot \frac{a^2}{r_a} = 4\mathrm{R}a^2(p - a).$$

Conséquemment,

$$abc \sum \frac{a^2}{r_a} = 4\mathrm{R} \sum a^2(p - a) = 4\mathrm{R}.4\mathrm{S}(\mathrm{R} + r);$$

d'où $$\sum \frac{a^2}{r_a} = 4(\mathrm{R} + r)\cdot$$

QUESTION 402

Solution par Madame Vᵉ F. Prime.

Une circonférence ayant pour centre un foyer d'une conique si l'on mène, à chaque normale de cette dernière courbe, une parallèle par le point où le rayon vecteur du pied de la normale rencontre la circonférence, les droites ainsi obtenues sont concourantes. Démonstration géométrique. (A. Tissot.)

Soient : F le foyer considéré,
F′ le second foyer,
M le pied de la normale,
M′ le point correspondant de la circonférence,
N et N′ les points où la normale et sa parallèle *mn* rencontrent l'axe focal.

Les triangles M'N'F, MNF, semblables, donnent la proportion

$$\frac{FN'}{FM'} = \frac{FN}{FM}.$$

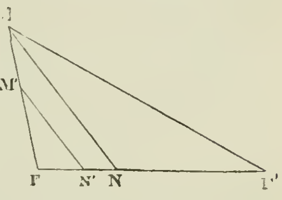
Mais, MN étant bissectrice de l'angle FMF',

$$\frac{FN}{FM} = \frac{F'N}{F'M} = \frac{FN \pm FN'}{FM \pm F'M} = \frac{e}{a} = e.$$

On a donc $FN' = e.FM'$;

et comme FM' est constante, il en est de même de FN'; ce qui démontre le théorème en question.

Dans le cas de la parabole, F' est rejeté à l'infini. On doit observer que MFN est, alors, un triangle isoscèle. Par suite M'FN' est, aussi, isoscèle; d'où l'on conclut que M'N' passe par un point fixe situé sur l'axe de la parabole, à une distance du foyer égale au rayon de la circonférence considérée; distance comptée dans le sens positif de l'axe, c'est-à-dire dans le sens opposé à celui du mouvement d'un mobile allant du foyer vers le sommet.



NOTA. — Solutions diverses par MM. Grolleau, maître répétiteur au lycée de Marseille; B. Sollertinsky.

QUESTIONS 400 ET 401

Solution par M. B. SOLLERTINSKY.

I. — *Démontrer que*

$$\frac{1}{2}\sum a^2(b-c)^2(ab+ac-2bc)^2$$

est un carré parfait.

II. — *Résoudre les équations :*

1° $(a-b)^2(2x-a-b)^2+(b-x)^2(2a-b-x)^2+(a-x)^2(2b-a-x)^2=2k^2$

2° $(a-b)^2(2x-a-b)^2+(b-x)^2(2a-b-x)^2+(a-x)^2(2b-a-x)^2$
$=(a'-b')^2(2x-a'-b')^2+(b'-x)^2(2a'-b'-x)^2+(a'-x)^2(2b'-a'-x)^2.$

(G. L.)

Quelles que soient les quantités m, n, p, on a

$$\sum m(n-p) = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2}\sum m^2(n-p)^2 = -\sum mn(n-p)(p-m)$$
$$= \sum mn[p^2 - p(m+n) + mn].$$

Si l'on suppose, de plus,

$$m + n + p = 0,$$

on voit que

$$\frac{1}{2}\sum m^2(n-p)^2 = \sum mn(2p^2 + mn) = \sum m^2n^2 + 2np.pm)$$
$$= (mn + np + pm)^2.$$

On a, aussi,

$$mn + np + pm = -\frac{1}{2}(m^2 + n^2 + p^2)$$

et $$mn + np + pm = mn - p^2.$$

I. En posant ici :

$$m = a(b-c).\ n = b(c-a),\ p = c(a-b),$$

on trouve

$$\frac{1}{2}\sum a^2(b-c)^2(ab+ac-2bc)^2 = \frac{1}{4}[a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2]^2.$$

II. En posant : $m = x - a$, $n = b - x$, $p = a - b$, on réduit la première équation à la suivante

1° $$(x-a)(b-x) - (a-b)^2 \pm M = 0.$$

De même, la seconde équation se transforme et devient :

2° $$(x-a)(b-x) - (a-b)^2 \pm [(x-a')(b'-x) - (a'-b')^2] = 0.$$

Nota. — Solutions diverses par MM. Youssoufian à Constantinople; Ch. Michel, élève au collège Chaptal; Grolleau, maître-répétiteur au Lycée de Marseille; A. Boutin.

QUESTION 404

Solution par M. Youssoufian.

Deux circonférences, de centres O, O′, *étant données ainsi qu'une droite* Δ *qui ne les rencontre pas, on peut mener, d'un point quelconque de la droite, une tangente à chaque circonférence. Trouver le point pour lequel la somme des deux tangentes ainsi obtenues est*

aussi petite que possible, et celui pour lequel leur différence est aussi grande que possible. (A. Tissot.)

Soient A, A′ les projections des centres O, O′ sur Δ. Portons sur OA, de part et d'autre du point A, des longueurs AB, AC égales à la tangente menée, de A, à la circonférence O. Prenons de même, sur A′O′, des longueurs A′B′, A′C′ égales, l'une et l'autre, à la tangente menée, de A′, à la circonférence O′.

Les droites B′B, B′C rencontrent AA′ aux points cherchés. En effet, les tangentes aux cercles O, O′, issues d'un point M sur AA′, sont respectivement égales aux distances MB, MB′ (*), etc.

QUESTIONS PROPOSÉES

429. — Sur deux anti-parallèles menées par A, dans le triangle ABC, déterminer deux couples de points inverses M, M′: N, N′ tels que les circonférences AMM′, ANN′ se coupent en un point donné P de la circonférence ABC. Condition de possibilité. Si D, D′ sont les rencontres de BC avec ces anti-parallèles, le point E où la circonférence APD′ coupe AD, est conjugué harmonique de A relativement à MN: de même, le point E′, où la circonférence APD coupe AD′, est conjugué de A relativement à M′N′. Si F, F′ sont les rencontres de la circonférence ABC avec AD, AD′, Q étant le point de rencontre des circonférences AMN′, ANM′, on a $\frac{QF}{QF'} = \frac{PF}{PF'}$; ou Q est sur la symédiane de PFF′. *(Bernès.)*

430. — Soit un triangle ABC. K, K_a, K_b, K_c le point de Lemoine et ses points algébriquement adjoints; A′, B′, C′ les milieux des trois côtés.

Par C, A′, B je mène des parallèles à la bissectrice de l'angle CAB, laquelle bissectrice coupe BC en A_1.

La parallèle menée par C coupe BA en C_1;
B coupe CA en B_1;
A′ coupe BA en γ, CA en β.

Cela posé: Soit M le point où βA_1 coupe BB_1,
N le point où γA_1 coupe CC_1.

(*) Voyez *Journal*, p. 143, question 395.

Les quatre points A, M, N, K sont en ligne droite.

Si, dans cette construction, on remplace la bissectrice de l'angle BAC par celle de son supplément, on aura des points A_1', C_1', B_1', γ', β', M', N', et : A, M', N', K seront en ligne droite.

Enfin, si l'on joint $\beta'A_1$ qui coupe BB_1' en M_1,

$\gamma'A_1$ CC_1' en N_1,

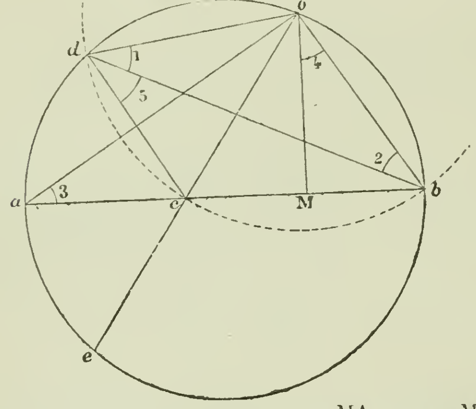
$\beta A_1'$ BB_1 en M_1',

$\gamma A_1'$ CC_1 en N_1',

A, M_1, N_1, K_b seront en ligne droite, ainsi que A, M_1', N_1', K_c.

Généraliser en montrant que si AA_1, au lieu d'être la bissectrice de BAC, est une ligne passant par le point dont les coordonnées normales sont x, y, z, la droite AMN passera par le point ax^2, by^2, cz^2. (*E. Lemoine.*)

Note. — Nous donnons ici la figure destinée à la question 397, (p. 22); figure oubliée dans la mise en pages du dernier numéro.



ERRATA

ET RECTIFICATIONS

1° 1891, p. 284. dernière ligne de la note :
Au lieu de: M diamétralement opposé à M'' :
Lisez : M' diamétralement opposé à M.

2° p. 284 dernière ligne avant la note :
Au lieu de : A :
Lisez : O''.

3° p. 287, l. —7.
Au lieu de : D'' :
Lisez : D'.

4° 1892, p. 22, l. —3, *au lieu de :* $\frac{MA}{MA}$: *lisez :* $\frac{MA}{MA'}$.

° » l. —11, » CD » CB.

l. —5, » ainsi EA : *lisez :* ou EA.

6° 1891, sur la figure, *lisez* T, *au lieu de* F et *supprimez* la lettre J sur AK.

7° p. 274, l. — 3, *au lieu de* Mathesis, *lisez* A. F., congrès de Limoges, 1890.

8° p. 275, l. — 5, » J, *lisez* T.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 206-1-92.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès,**

(*Suite*, voir page 25.)

APPLICATION AUX POINTS ISOPTIQUES

XXII. — Nous avons appelé *isoptiques* deux points M, N dont les coordonnées angulaires sont respectivement égales et de signes contraires. Le milieu de la droite MN qui les joint sera dit *le centre du couple isoptique.*

Chacune des trois coordonnées angulaires λ, μ, ν définit une circonférence, et nous avons vu que si $\lambda + \mu + \nu = 0$, ces trois circonférences se coupent en un point M qui est unique, lorsque ces coordonnées ne sont pas égales à A, B, C. Et comme $\lambda + \mu + \nu = 0$ entraîne $-\lambda - \mu - \nu = 0$, il s'ensuit que les trois circonférences symétriques des premières relativement à BC, CA, AB, définies par $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, se coupent aussi en un même point N, qui sera l'isoptique de M. Si λ, μ, ν sont égaux à A, B, C. les trois circonférences que ces valeurs définissent coïncident avec la circonférence ABC, M est alors un point arbitraire de la circonférence ABC, et l'isoptique N est l'orthocentre. Réciproquement, si M est l'orthocentre, c'est-à-dire si λ, μ, ν sont égaux à $-$ A, $-$ B, $-$ C, l'isoptiqne N sera un point quelconque de la circonférence ABC.

Il faut signaler aussi le cas où M coïncide avec un des sommets, A par exemple ; alors $\lambda = A$; et comme les deux autres coordonnées de A sont indéterminées, on peut prendre, pour isoptique de A, un point quelconque de la circonférence définie par $\lambda = -A$, c'est-à-dire la circonférence HBC.

Si deux des coordonnées sont nulles, la troisième l'est aussi, et il en est de même de $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$. On peut donc dire que tout point à l'infini a son isoptique à l'infini. Nous verrons, d'ailleurs qu'il est à lui-même son isoptique. En dehors de ce cas, l'égalité des coordonnées d'un point avec celles de son

isoptique entraîne la coïncidence de ces deux points. En effet $\lambda = -\lambda$, $\mu = -\mu$, $\nu = -\nu$ donnent $2\lambda = 0$, $2\mu = 0$, $2\nu = 0$; ce qui, indépendamment de la solution $\lambda = \mu = \nu = 0$ qui correspond à un point à l'infini, donne les trois points

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda = 0\\ \mu = \frac{\pi}{2}\\ \nu = \frac{\pi}{2}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\lambda = \frac{\pi}{2}\\ \mu = 0\\ \nu = \frac{\pi}{2}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\lambda = \frac{\pi}{2}\\ \mu = \frac{\pi}{2}\\ \nu = 0\end{array}\right.$$

Ce sont les pieds des trois hauteurs H_a, H_b, H_c. Chacun de ces pieds est sa propre isoptique.

Si une seule des coordonnées, λ par exemple, est nulle, les points isoptiques M, N sont sur BC, et comme $\mu = -\nu$, ces deux points sont symétriques relativement à H_a. Si M est en B ou en C, l'isoptique, comme il a été dit, est indéterminé sur la circonférence HCA ou HBA. Les trois côtés renferment donc une infinité de couples isoptiques ayant pour centre le pied de la hauteur correspondante.

Les trois hauteurs jouissent de la même propriété. Il est clair que sur AH par exemple, deux points quelconques, équidistants de H_a de part d'autre, sont isoptiques. Les points H et A ont seuls, leurs isoptiques indéterminées.

Nous verrons plus loin que ces six droites BC, CA, AB, AH BH, CH sont les seules sur lesquelles il y ait une infinité de couples isoptiques, et que, sur une droite quelconque, autre que celle-là, il y a au plus deux couples isoptiques, ayant pour centres les points où cette droite rencontre la circonférence des neuf points de ABC. Il est fait abstraction des points isoptiques à l'infini.

Théorème. — *Le lieu des centres de tous les couples isoptiques est la circonférence des neuf points du triangle* ABC.

On peut donner, de ce théoréme, une démonstration tout à fait élémentaire, en s'appuyant sur un lemme qui constitue lui-même une propriété remarquable des couples isoptiques.

Lemme. — M, N *étant deux points isoptiques quelconques,* E, F *les centres des cercles* MBC, NBC; *si, par* D *milieu de* BC, *on*

trace $D\mu$, $D\nu$ *égaux et parallèles aux rayons* EM, FN *et de même sens, la droite* $\mu\nu$ *passe par un point fixe* U, *milieu de la droite* AH *qui joint* A *à l'orthocentre.*

Comme les cercles MBC, NBC sont symétriques relativement à BC, leurs rayons EM, FN sont égaux. Par suite μ, ν sont sur un cercle, de même rayon, ayant D pour centre. Si l'on imprime, à chacun des cercles MBC, NBC, une translation rectiligne qui amène leurs centres en D, ils viennent coïncider avec le cercle D. Dans ces deux translations les isocycliques m', n' de M, N, qui, d'après le § 2, sont symétriques relativement à BC, se déplacent sur la droite $m'n'$ de quantités $m'\mu'$, $n'\nu'$ égales et contraires, et se placent en μ', ν' sur le cercle D, aux extrémités d'une corde perpendiculaire à BC. Les droites $\mu\mu'$, $\nu\nu'$, respectivement parallèles à AMm', ANn', déterminent, sur la hauteur AH, deux points E_1, F_1 distants de A, de part et d'autre, d'une quantité égale à DE. Si K est le point où se coupent les droites $E_1\mu\mu'$, $F_1\nu\nu'$, les cordes $\mu\nu$, $\mu'\nu'$ de la circonférence D sont antiparallèles relativement à l'angle E_1KF_1 ; $\mu\nu$, E_1F_1 sont donc antiparallèles relativement à cet angle, et les quatre points E_1, F_1, μ, ν, sont sur une même circonférence. D'autre part si, U étant le milieu de AH, le second point de rencontre de $U\mu$ avec la circonférence D est désigné par ν_1, on a

$$U\mu . U\nu_1 = \overline{UD}^2 - \overline{EC}^2.$$

Et comme $$UD = R = OC,$$

$$U\mu \, U\nu_1 = \overline{OC}^2 - \overline{EC}^2 = \overline{DO}^2 - \overline{DE}^2 = \overline{AU}^2 - \overline{AE}_1^2 = UE_1 . UF_1;$$

μ, ν_1, E_1, F_1 sont sur une même circonférence, c'est-à-dire que ν_1 est le second point de rencontre de la circonférence μE_1F_1 avec la circonférence D; donc ν_1 se confond avec ν, et $\mu\nu$ passe par le point fixe U.

Le théorème en résulte immédiatement. Dans le parallélogramme $MN\nu\mu$, le milieu P de MN se confond avec le milieu de $\mu\nu$, corde du cercle D, et DP est perpendiculaire à $U\mu\nu$. Donc P appartient à sa circonférence décrite sur UD comme diamètre, laquelle est la circonférence des neuf points du triangle ABC.

Problème 1. — *Construction des couples isoptiques ayant pour centre un point donné* P *du cercle des neuf points.*

La construction d'un de ces couples se réduit à ceci : *De part et d'autre de* P, *on prend sur* UP *deux points arbitraires* μ, ν *équidistants de* P*; de* C *comme centre avec un rayon* ρ *égal à* $D\mu$ *on décrit une circonférence qui coupe* OD *en* E, F. *Sur des parallèles à la hauteur* AH, *menées par* μ *et* ν, *on porte, en deux sens contraires,* μM, νN *égaux à* DE *ou* DF : MN *est un couple isoptique ayant* P *pour centre.*

En échangeant les sens de μM, νN on obtient un second couple isoptique M_1N_1 de même centre, correspondant au même rayon ρ; et en faisant varier ρ, on en obtient une infinité, qui peuvent de même s'associer deux à deux. Ces couples isoptiques MN, M_1N_1 qui ont même centre, et où M, M_1 sont sur une même normale à un côté BC, ainsi que N, N_1, peuvent être dits *normalement associés*.

Pour démontrer que les points M, N ainsi construits sont isoptiques, prenons sur AH, AE égal à ED et de même sens, AF égal à FD et de même sens. On voit, comme dans le théorème, que $U\mu . U\nu = UE_1 \, UF_1$ et que par conséquent $\mu\nu$ est antiparallèle à E_1F_1 relativement à l'angle E_1KF_1 défini comme plus haut. Si donc μ', ν' sont les secondes rencontree de $E_1\mu$, $F_1\nu$ avec la circonférence D (de centre D et qui passe par μ, ν), comme les cordes $\mu\nu$, $\mu'\nu'$ sont antiparallèles relativement au même angle, il s'ensuit que $\mu'\nu'$ est parallèle à AH, c'est-à-dire que μ', ν' sont symétriques relativement à BC. Si maintenant on imprime au cercle D deux translations rectilignes qui amènent : l'une D en E, l'autre, D en F, μ, ν viennent en M, N, les points μ_1',ν' prennent, sur les cercles MBC, NBC, les positions m', n' toujours symétriques relativement à BC, et les droites $\mu\mu'$, $\nu\nu'$ venues en Mm', Nn' passent par A, de sorte que m', n' sont les isoptiques de MN, et puisqu'ils sont symétriques relativement à BC, M et N sont isoptiques.

Discussion. — La réalité des centres E,F exige que l'on ait $\rho \geqslant DC$. Si Pest sur l'arc H_tUH_c du cercle des neuf points, cette condition est remplie; car alors DP et *a fortiori* $D\mu$ ou ρ surpasse DH_b, égal à DC. On peut en ce cas, pour la construction

de l'un des couples, prendre μ,ν confondus avec P, ce qui donne un couple isoptique MN parallèle à AH, qui se réduit à un point lorsque P est en H_b ou H_c et devient AH lorsque P est en U.

Si P est sur l'arc H_bDH_c et qu'on prenne $\rho = DC$, DE est nul, M, N se confondent avec μ, ν et sont situés sur la circonférence décrite sur BC comme diamètre. D'où cette proposition à remarquer : *Sur le cercle ayant pour diamètre un côté de* ABC, *les extrémités de toute corde qui passe par le milieu de la distance de l'orthocentre au sommet opposé à ce côté, forment un couple isoptique*. Cette proposition sera complétée plus loin.

Si, P étant quelconque, $\rho = R$, le point μ est en U, et M en A ou en H. *Ainsi* M *ne change pas quand* P *se déplace; le point* N *parcourant le cercle* HBC (*si* M *est en* A), *le cercle* ABC (*si* M *est en* H).

Quand P est en H_b, ρ étant quelconque, on a

$$\overline{\mu M}^2 = \overline{D\mu}^2 - \overline{DH}_b^2 = \overline{\mu H}_b^2,$$

et les deux positions de M, correspondant à un même point μ, sont l'une sur la hauteur BH_b, l'autre sur AC, le point isoptique N occupant sur ces mêmes droites la position symétrique relativement à H_b. On retrouve ainsi ce résultat déjà indiqué : *Sur chaque hauteur et sur le côté correspondant il y a une infinité de couples isoptiques ayant pour centre le pied de cette hauteur*. En outre : *sur toute autre droite passant par ce pied, le seul couple isoptique, ayant ce pied pour centre, se réduit à ce pied qui est sa propre isoptique*. Mais cette droite peut aussi contenir un couple ayant pour centre l'autre point où elle rencontre le cercle des neuf points, couple dont il faut également tenir compte quand la droite se confond avec le côté ou la hauteur; sur BC, B et C sont isoptiques, et sur AH, A et H.

Quand P est en H_a, la construction ne donne que les couples situés sur la hauteur AH. Ceux qui sont situés sur BC correspondent à une valeur infinie de ρ; car les cercles MBC, NBC se confondent alors avec la droite BC, et μ et ν sont à l'infini.

Corollaire. — *Quand deux couples isoptiques* MN, M_1N_1 *sont normalement associés, si* BC *est le côté auquel* MM_1, NN_1 *sont*

perpendiculaires, 1° les cercles décrits sur MM_1, NN_1 *comme diamètres sont orthogonaux au cercle* δ *décrit sur* BC *comme diamètre, 2° chacun des points* M, M_1 *est situé sur la polaire de l'autre relativement au cercle* δ ; *de même pour* N, N_1.

1° Le point μ de la construction est le centre du cercle décrit sur MM_1 comme diamètre, et l'on a

$$\overline{\mu D}^2 = \overline{\mu M}^2 + \overline{DC}^2,$$

ce qui prouve l'orthogonalité de ce cercle et du cercle δ.

2° La seconde partie résulte de la première. Car la même égalité, sous la forme

$$\overline{\mu D}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{\mu M}^2.$$

exprime que le point μ est d'égale puissance relativement au cercle δ et au cercle-point M, de sorte que l'axe radical de ces deux cercles passe par μ ; par suite, la polaire de M, relativement au cercle δ passe par M_1.

Ce raisonnement prouve, d'une manière générale, que la condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles soient orthogonaux, est que les extrémités d'un diamètre du premier soient chacune sur la polaire de l'autre relativement au second cercle.

Remarquons que, si μ se déplace sur UP, il y a une infinité de droites MM_1, NN_1 et que tous les cercles décrits sur ces droites comme diamètres, étant orthogonaux au cercle δ, ils ont pour axe radical commun la droite DP. L'un de ces cercles étant décrit sur AH comme diamètre, si P est sur l'arc H_bUH_c, l'axe radical DP est sécant à ces cercles, qui ont alors deux points communs. Et si P est sur l'arc H_bDH_c, l'axe radical DP n'est plus sécant, et les points-limites de la série sont les points où UP rencontre la circonférence δ, points qui sont isoptiques ainsi qu'il a été déja vu et comme il résulte aussi de ce qu'ils sont les positions extrêmes de MM_1, NN_1.

Problème 2. — *Un point* M *étant donné, construire son isoptique* N.

Deux constructions évidentes résultent, la première de ce que *les isogonaux de* M, N *sont conjugués*, la seconde de ce que *les isocycliques de* M, N *sont symétriques relativement à* BC. L'une

et l'autre de ces constructions montrent que si M est à l'infini, son isoptique coïncide avec lui.

Une troisième construction ressort du corollaire précédent. M étant donné, on obtient, M_1 par la polaire de M relativement au cercle δ; de là μ, de là P projection de D sur $U\mu$, et par suite N.

Plus simplement encore, ayant déterminé le centre E du cercle MBC, on prendra $M\mu$ égal et parallèle à ED et de même sens, et de μ on déduira P et N.

Ceci nous conduit à un théorème important :

Théorème. — *Lorsque deux points sont isoptiques relativement au triangle* ABC, *ils le sont relativement à chacun des triangles* HBC, HCA, HAB.

Car si HBC est pris pour triangle de référence, l'orthocentre est en A; ni U, ni D, ni par conséquent le cercle des neuf points ne sont changés; la construction de l'isoptique d'un point M, telle qu'elle vient d'être expliquée, conduit au même point N que pour le triangle ABC.

Corollaire I. — En appliquant au côté AH du triangle HCA la proposition énoncée dans le cours de la discussion du problème I, on peut compléter ainsi cette proposition : *Si l'on considère le cercle ayant pour diamètre la droite qui joint deux quelconques des quatre points* A, B, C, H, *les extrémités de toute corde de ce cercle, passant par le milieu de la droite qui joint les deux autres, sont isoptiques.*

Comme d'ailleurs ces quatre cercles sont deux à deux orthogonaux, par exemple, le cercle de diamètre AH orthogonal au cercle du diamètre, on peut dire que : *les extrémités de chaque couple isoptique situé sur l'un de ces cercles sont conjuguées relativement au cercle orthogonal.*

Corollaire II. — Si l'on applique au triangle CAH le lemme du théorème principal, on a cette proposition :

MN *étant deux points isoptiques quelconques,* E, F *les centres des cercles* MAH, NAH *(qui sont symétriques relativement à* AH*)*; *si par* U, *milieu de* AH, *on trace* $U\mu$, $U\nu$, *égaux et parallèles aux rayons* EM, FN, *et de même sens, la droite* $\mu\nu$ *passe par le milieu* D *de* BC.

Et de là aussi cette solution du problème 1 : *De part et d'autre de* P *on prend. sur* DP, *deux points arbitraires* μ, ν *équidistants de* P; *et de* A, *comme centre, avec un rayon* ρ *égal à* $U\mu$ *on décrit un cercle qui coupe en* E,F *la perpendiculaire en* U *à* AH. *Sur les parallèles à* BC *menées par* μ, ν *on porte, en deux sens contraires,* μM, νN *égaux à* UE *ou* UF, MN *est un couple isoptique ayant* P *pour centre.*

On notera aussi la possibilité de substituer H à A dans chacune des deux premières constructions de l'isoptique d'un point donné M, et AH à BC dans les deux autres.

Problème 3. — *Construire les couples isoptiques situés sur une droite donnée.*

Soit X la droite donnée. Si elle ne rencontre pas le cercle des neuf points, il est clair qu'elle ne renferme aucun couple isoptique. Supposons donc qu'elle coupe la circonférence en P et P′, et voyons comment on peut construire le couple isoptique MN, situé sur la droite, et qui a pour centre l'un de ces points P.

La parallèle à AH, menée par M, coupe UP en μ. La condition nécessaire et suffisante pour que M et son symétrique N relativement à P forment un couple isoptique, est

$$\overline{\mu M}^2 = \overline{\mu D}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{DP}^2 + \overline{P\mu}^2 - \overline{DC}^2$$

ou $$\overline{P\mu}^2 - \overline{M\mu}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{DP}^2.$$

Comme $$\overline{DC}^2 = R^2 - \overline{OD}^2 = R^2 - \overline{AU}^2$$

et que $$\overline{DP}^2 = R^2 - \overline{PU}^2,$$

la condition peut s'écrire

$$\overline{P\mu}^2 - \overline{M\mu}^2 = \overline{PU}^2 - \overline{AU}^2.$$

(Elle exprime simplement que P est sur l'axe radical des cercles décrits sur MM_1 et AH comme diamètres.)

On peut écarter tout d'abord le cas particulier où X est parallèle à AH, car alors $M\mu$ se confondant axec X, μ est en P, et M et N sont à l'intersection de X et la circonférence décrite de P comme centre, orthogonalement au cercle δ décrit sur BC comme diamètre. Ceci exige que P soit sur l'arc H_bUH_c du cercle des neuf points.

Ce cas écarté, et supposant que P ne soit pas en U, soit α

la rencontre de X avec AH. La similitude de PMμ, PαU donne

$$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{P\alpha}^2} = \frac{\overline{P\mu}^2 - \overline{M\mu}^2}{\overline{PU}^2 - \overline{\alpha U}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{PM}^2}{\overline{P\alpha}^2} = \frac{\overline{PU}^2 - \overline{AU}^2}{\overline{PU}^2 - \overline{\alpha U}^2},$$

égalité qui détermine le couple isoptique MN, de centre P, situé sur X. La condition de réalité est que si l'on considère les deux cercles décrits de U comme centre, l'un avec UA, l'autre Uα comme rayon, P ne soit pas sur la couronne comprise entre ces deux cercles. Selon que les deux points P, P′ de X, ou un seul, satisfont à cette condition, ou qu'aucun n'y satisfait, il y a, sur la droite, deux ou un couple isoptique, ou il n'y en pas. Si ϖ, ϖ' sont les longueurs dont les carrés représentent les puissances de P relativement aux deux cercles U (normales à AH, ou tangentes), PM se construit par l'égalité $\dfrac{PM}{P\alpha} = \dfrac{\varpi}{\varpi'}$.

Le passage d'un couple réel à un couple imaginaire, ou inversement, se fait lorsque P est sur l'une des deux circonférences. Quand il est sur la première, c'est-à-dire en H_b ou H_c, PM s'annule, le couple se réduit au point P; quand il est sur la seconde, le couple est rejeté à l'infini.

Mais il y a indétermination si l'on a, à la fois, PU = AU et AU = αU. L'égalité PU = AU suppose P en H_b ou H_c; et AU = αU suppose α en A ou H. Ainsi l'indétermination a lieu lorsque X se confond avec BH_b ou AC, avec CH_c ou AB, et nous savons qu'en effet il y a alors sur X une infinité de couples isoptiques.

Quand la condition AU = αU est seule vérifiée, c'est-à-dire quand α est en A ou en H, on a PM = Pα, c'est-à-dire que le couple est formé par A et un point du cercle HBC, ou par H et un point du cercle ABC.

Il reste à examiner le cas où P est en U. La formule est alors en défaut, le triangle PαU se réduisant à un point. La droite PU perpendiculaire à DP et sur laquelle est μ, devient la tangente en U au cercle des neuf points, Si une parallèle arbitraire à AH est coupée en V par cette tangente et en β par X on a, par similitude de UμM avec UVβ,

$$\frac{\overline{UM}^2}{\overline{U\beta}^2} = \frac{\overline{AU}^2}{\overline{\beta V}^2 - \overline{UV}^2}$$

ce qui exige $\beta V > UV$; c'est-à-dire que si l'on trace les bissectrices des deux angles adjacents VUH, VUA, X qui passe alors par U doit être situé dans celui des angles droits formé par ces deux bissectrices qui contient AH. Si X se confond avec une des bissectrices, le couple isoptique est rejeté à l'infini. Si X se confond avec la hauteur, le couple est AH. Quand X est une droite quelconque tracée par U, le couple qui a pour centre U, sur cette droite, est déterminé par $\frac{UM}{U\beta} = \frac{AU}{\beta t}$, βt étant la tangente menée par β au cercle de centre V et de rayon UV.

D'après cette discussion : *les côtés et les hauteurs sont les seules droites sur lesquelles il y ait une infinité de couples isoptiques. Sur toute autre droite : ou il n'y a pas de couple isoptique, ou il y en a un, ou il y en a deux.* *(A suivre.)*

NOTE DE GÉOMÉTRIE ET DE MÉCANIQUE

Par M. **Louis Bénézech.**

I. — Soient, dans l'espace, n points quelconques $A_1, A_2, \ldots A_n$ affectés respectivement des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; O, leur centre des distances proportionnelles; $x_1, x_2, \ldots x_n$, X les longueurs algébriques des projetantes parallèles à un axe fixe Sx des points $A_1, A_2, \ldots A_n$, O sur un plan SYZ. D'après un théorème connu, on a :

(1) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\,X.$

Or, M étant un point quelconque de l'espace, si l'on représente, d'une manière générale, par le symbole $\underline{MA_k}$ la projection du segment MA_k sur l'axe Sx, on peut écrire

$$\underline{SM} + \underline{MO} = X$$
$$\underline{SM} + \underline{MA_1} = x_1$$
$$\vdots$$
$$\underline{SM} + \underline{MA_n} = x_n$$

Par suite la relation (1) devient

(2) $\alpha_1.\underline{MA_1}+\alpha_2.\underline{MA_2}+\ldots+\alpha_n.\underline{MA_n}=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\underline{MO}.$

Ainsi, la somme des projections, sur un axe quelconque, des segments représentés en grandeur et en signe par $\alpha_1.MA_1\ldots\alpha_n.MA_n$, est égale à la projection du segment représenté en grandeur et en signe par $(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)MO$ (*).

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — Lorsqu'on joint un point quelconque M à n points $A_1, A_2 \ldots A_n$ donnés dans l'espace, la résultante géométrique des segments représentés en grandeur et en signe par $\alpha_1.MA_1,\ldots\alpha_n.MA_n$ est elle-même représentée en grandeur et en signe par $(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)MO$; le point O étant le centre des distances proportionnelles du système (A_1, α_1) (A_2, α_2) ... (A_n, α_n).

Corollaire. — Étant donnés n points quelconques

$$A_1, A_2, \ldots A_n,$$

le lieu géométrique de l'extrémité R de la résultante des forces représentées en grandeur et en direction par

$$\alpha_1.MA_1, \ldots \alpha_n MA_n$$

est une courbe homothétique à celle qui est décrite par M, le centre d'homothétie étant le centre des distances proportionnelles du système $(A_1, \alpha_1)\ldots(A_n, \alpha_n)$ et le rapport d'homothétie $\frac{OR}{OM}$ étant égal à $1-(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)$.

La relation (2) peut aussi s'écrire

$$\alpha_1(\underline{MA_1}-\underline{MO})+\ldots+\alpha_n(\underline{MA_n}-\underline{MO})=0,$$

ou bien

(3) $\alpha_1.\underline{OA_1}+\alpha_2.\underline{OA_2}+\ldots+\alpha_n.\underline{OA_n}=0,$

égalité d'où l'on déduit cette proposition :

Théorème II. — Lorsqu'un point O est le centre des distances proportionnelles d'un système de points (A_1, α_1), ... (A_n, α_n), les forces représentées, en grandeur et en signe, par $\alpha_1.OA_1\ldots\alpha_n.OA_n$ se font équilibre.

Corollaire. — Lorsqu'on joint le centre O d'un polyèdre

(*) C'est, sans doute, cette proposition que M. Laisant a voulu utiliser dans son article : « Sur la perspective d'une figure plane ».

ou d'un polygone régulier aux sommets A_1, A_2, ... A_n, les forces représentées, en grandeur et en direction, par OA_1, OA_2...OA_n, se font équilibre.

II. — *Applications au tétraèdre.*

Dans tout tétraèdre, le centre des distances proportionnelles des sommets A_1, A_2, A_3, A_4, affectés respectivement des coefficients α_1, α_2, α_3, α_4, étant le point dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles à ces coefficients, on peut énoncer immédiatement les théorèmes qui suivent :

Théorème III. — Lorsqu'on joint un point quelconque M aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4 d'un tétraèdre, la résultante des segments représentés, en grandeur et en signe, par $\alpha_1 MA_1 \ldots \alpha_4 MA_4$, est elle-même représentée en grandeur et en signe par $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_4)MO$, O étant le point qui a pour coordonnées barycentriques, par rapport au tétraèdre considéré, α_1, α_2, α_3, α_4.

Cas particulier. — Lorsqu'on joint un point quelconque M aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4 d'un tétraèdre, la résultante des segments représentés, en grandeur et en direction, par MA_1... MA_4, passe par le centre de gravité G du tétraèdre ; elle est représentée, en grandeur et en direction, par 4MG.

Théorème IV. — Si α_1, α_2, α_3, α_4 sont les coordonnées barycentriques d'un point O, par rapport au tétraèdre A_1, A_2, A_3, A_4, les forces représentées, en grandeur et en direction, par $\alpha_1 . OA_1 \ldots \alpha_4 . OA_4$, se font équilibre.

On démontre, sans difficulté, la réciproque de ce théorème.

Théorème V. — Lorsque les forces représentées, en grandeur et en direction, par $\alpha_1 . OA_1, \ldots \alpha_4 . OA_4$, se font équilibre, les coefficients $\alpha_1 \ldots \alpha_4$ sont proportionnels aux coordonnées barycentriques du point O par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

Cas particuliers. — 1° Pour que les forces représentées en grandeur et en direction par GA_1, GA_2, GA_3, GA_4 se fassent équilibre, il faut et il suffit que le point G coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

2° Si s_1, s_2, s_3, s_4 désignent des nombres proportionnels aux aires des faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, pour que les forces représentées en grandeur et en direction par $s_1.IA_1$, $s_2.IA_2$, $s_3.IA_3$, $s_4.IA_4$ se fassent équilibre, il faut et il suffit que le point I coïncide avec le centre de la sphère inscrite au tetraèdre considéré.

III. — Dans le cas où les points $A_1, A_2, \ldots A_n$, M sont situés dans un même plan, on a des théorèmes analogues à ceux qui précèdent.

Soit donc O le centre des distances proportionnelles du système $(A_1, \alpha_1) \ldots (A_n, \alpha_n)$, la résultante des segments représentés en grandeur et en signe par $\alpha_1.MA_1 \ldots \alpha_n.MA_n$ passera par le point O et sera représentée, en grandeur et en signe, par $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)MO$. Appelons $x_1, x_2, \ldots x_n$, X les distances algébriques d'un point quelconque P du plan aux segments $MA_1, MA_2, \ldots MA_n$, MO. Le produit $x_K.MA_K$ est la quantité qu'on nomme, en Mécanique, moment du segment MA_K par rapport au point P. En appliquant le théorème des moments, il vient

$$(4) \qquad \sum \alpha_1.x_1.MA_1 = \left(\sum \alpha_1\right) X.MO;$$

ou, si les segments se font équilibre,

$$\sum \alpha_1.x_1.MA_1 = 0.$$

De ces relations on déduit les théorèmes suivants :

Théorème VI. — Le lieu géométrique des points tels que leurs distances algébriques $x_1, x_2, \ldots x_n$, à n segments de droites $MA_1, MA_2, \ldots MA_n$, vérifient la relation

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = K,$$

est une parallèle, menée à la distance

$$X = \frac{K}{MO \sum \frac{m_1}{MA_1}},$$

à la résultante $MO \sum \frac{m_1}{MA_1}$ des segments

$$\left(\frac{m_1}{MA_1}\right) MA_1 \ \ldots \left(\frac{m_n}{MA_n}\right) MA_n;$$

le point O étant le centre des distances proportionnelles du système

$$\left(A_1, \frac{m_1}{MA_1}\right), \ldots \left(A_n, \frac{m_n}{MA_n}\right).$$

Si K est nul, le lieu cherché est la résultante des segments

$$\left(\frac{m_1}{MA_1}\right)MA_1. \ldots \left(\frac{m_n}{MA_n}\right)MA_n.$$

Théorème VII. — Lorsque les segments

$$\left(\frac{m_1}{MA_1}\right)MA_1, \ldots \left(\frac{m_n}{MA_n}\right)MA_n,$$

se font équilibre, le lieu géométrique des points tels que l'on ait

$$m_1x_1 + \ldots + m_{n-1}x_{n-1} = K,$$

est la parallèle à MA_n, menée à la distance

$$x_n = -\frac{K}{m_n}.$$

En effet, puisqu'on doit avoir, pour les points cherchés,

$$m_1x_1 + \ldots + m_{n-1}x_{n-1} = K,$$

et que, d'ailleurs,

$$\left(\frac{m_1}{MA_1}\right) MA_1.x_1 + \ldots + \left(\frac{m_n}{MA_n}\right) MA_n.x_n = 0,$$

on a

$$\left(\frac{m_n}{MA_n}\right)MA_n.x_n + K = 0.$$

RÈGLE DES ANALOGIES DANS LE TRIANGLE.

TRANSFORMATION CONTINUE

Par M. **Émile Lemoine.**

Au congrès de l'Association française à Limoges en 1890 nous avons donné un grand nombre de formules relatives au triangle dont beaucoup étaient nouvelles, et nous avons cherché à montrer l'avantage de leur emploi dans la géométrie du triangle; parmi ces formules plusieurs avaient entre elles de grandes analogies et je m'étais demandé s'il n'existait pas une loi au moyen de laquelle, étant donnée une formule, on pût déduire ses analogues.

J'avais trouvé la loi cherchée; mais ma démonstration, invoquant le principe de *Carnot* dans la déformation du triangle, laissait quelque indécision, à des multiples de π près, dans la valeur des angles après le passage à l'infini du point de concours des droites qui les formaient, et je cherchais autre chose, lorsque M. *Laisant*, à qui j'avais parlé de mes résultats m'en donna la solution élégante et rigoureuse que j'ai communiquée cette année au Congrès de Marseille.

Par cette loi, les formules et les théorèmes se déduisent au moyen d'une transformation que j'ai appelée : *transformation continue*, dénomination qui rappelle le principe de *Carnot*, au moyen duquel je l'ai trouvée. J'expose ici une troisième démonstration plus intuitive.

Toute relation entre les éléments d'un triangle revient à une identité entre les lignes trigonométriques des trois angles A, B, C de ce triangle (angles dont la somme est égale à π), car tous ces éléments peuvent s'exprimer en fonction de ces trois angles et d'un élément linéaire qui disparaît en vertu de l'homogénéité.

Soit $$F(A, B, C) = 0,$$ cette identité.

Elle aura lieu évidemment, quels que soient les angles A, B, C, pourvu que $A + B + C = \pi$.

Je peux donc remplacer les angles A, B, C dans cette identité par des angles A′, B′, C′, pourvu que $A' + B' + C' = \pi$.

Si je prends pour A′, B′, C′, des fonctions de A, B, C, cette identité se présentera sous une autre *forme* où entreront les angles A, B, C, et cette autre forme pourra correspondre à l'expression d'une autre propriété des éléments du triangle.

Si nous posons :

$$A' = -A; \qquad B' = \pi - B; \qquad C' = \pi - C;$$

c'est-à-dire, si nous remplaçons dans $F(A, B, C) = 0$, A, B, C respectivement par $-A$, $\pi - B$, $\pi - C$, ce dont nous avons le droit d'après ce qui précède, nous ferons ce que nous appelons la *transformation continue* en A.

Si l'on remplace dans $F(A, B, C) = 0$, A, B, C respectivement par $\pi - A$, $-B$, $\pi - C$ ce sera la *transformation continue* en B, etc.

Dans la *transformation continue* en A, examinons comment se transforment les éléments du triangle en supposant que $BC = a$ soit l'élément linéaire fixe, choisi.

On a : $$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

En faisant dans les seconds membres la *transformation continue* en A, on voit qu'ils changent de signe ; donc :

b devient $-b$, c devient $-c$.

De même on a : $R = \frac{1}{2}\frac{a}{\sin A}$; *par transformation continue en* A le second membre change de signe, donc R devient $-R$.

On a : $S = \frac{1}{2} bc \sin A$; *par transformation continue en* A le second membre change de signe ; donc S devient $-S$ etc.

Voici pour les principales fonctions simples des éléments du triangle le tableau des résultats que donne la *transformation continue en* A.

a	se change en	a	$\cos A$	se change en	$\cos A$
b	»	$-b$	$\cos B$	»	$-\cos B$
c	»	$-c$	$\cos C$	»	$-\cos C$
A	»	$-A$	$\sin\frac{A}{2}$	»	$-\sin\frac{A}{2}$
B	»	$\pi - B$	$\sin\frac{B}{2}$	»	$\cos\frac{B}{2}$
C	»	$\pi - C$	$\sin\frac{C}{2}$	»	$\cos\frac{C}{2}$
p	»	$-(p-a)$	$\cos\frac{A}{2}$	»	$\cos\frac{A}{2}$
$(p-a)$	»	$-p$	$\cos\frac{B}{2}$	»	$\sin\frac{B}{2}$
$(p-b)$	»	$(p-c)$	$\cos\frac{C}{2}$	»	$\sin\frac{C}{2}$
$(p-c)$	»	$(p-b)$	h_a	»	$-h_a$
S	»	$-S$	h_b	»	$-h_b$
R	»	$-R$	h_c	»	$-h_c$
r	»	r_a	l_a	»	$-l_a$
r_a	»	r			
r_b	»	$-r_c$			
r_c	»	$-r_b$			
$\sin A$	»	$-\sin A$			
$\sin B$	»	$\sin B$			
$\sin C$	»	$\sin C$			

l'_a	se change en	$-l'_a$	δ_a	se change en	$-\delta$
l_b	»	$-l'_b$	δ_b	»	$-\delta_c$
l'_b	»	$-l_b$	δ_c	»	$-\delta_b$
l_c	»	$-l'_c$	ω	»	$-\omega$
l'_c	»	$-l_c$		etc., etc.	
δ	»	$-\delta_a$			

Nous appelons h_a, h_b, h_c, les trois hauteurs; l_a, l_b, l_c, les trois bissectrices, l'_a, l'_b, l'_c; les trois bissectrices extérieures; δ, δ_a, δ_b, δ_c; les quantités $4R + r$, $4R + r_a$, $4R + r_b$, $4R + r_c$, ω l'angle de *Brocard*.

Cette transformation ne donne pas toujours lieu à une nouvelle formule; ainsi, en l'appliquant à l'égalité

$$a = b \cos C + c \cos B,$$

on obtient :

$$a = -b \cos (\pi - C) - c \cos (\pi - B);$$

et la formule est reproduite. Mais, le plus souvent, la transformation donne de nouvelles formules. Ainsi :

$$a(p - a) + b(p - b) + c(p - c) = 2r\delta$$

donne :

$$ap + b(p - c) + c(p - b) = 2r_a\delta_a;$$

$$a(p - a) = r(\delta - r_a) \quad \text{donne :} \quad ap = r_a(\delta_a + r);$$

$$r_a \cos A + r_b \cos B + r_c \cos C = \frac{p^2 - R\delta}{R}$$

donne :

$$r \cos A + r_c \cos B + r_b \cos C = \frac{R\delta_a - (p-a)^2}{R}.$$

Nous ne multiplions pas ici ces exemples parce que beaucoup des formules que nous écririons seraient parmi celles que nous avons publiées à l'*Association française pour l'avancement des sciences* au Congrès de Limoges et aux congrès antérieurs avant d'être en possession de la théorie de la *transformation continue*, et dans celles qui composent un article que nous avons adressé au journal *Mathesis*, il y a quelques mois, et qui paraîtra sous peu.

Utilité de la transformation continue. — 1° Elle permet, une formule étant établie, d'en déduire le plus souvent une ou plusieurs autres.

2° Un théorème en donne souvent aussi, par conséquent, un ou plusieurs autres; les calculs ou les raisonnements, pour

démontrer directement les nouveaux théorèmes, peuvent être calqués sur ceux qui ont permis d'établir le théorème d'où l'on part en y faisant seulement les modifications qui sont les conséquences de la transformation.

En voici quelques exemples :

Supposons que les coordonnées normales absolues d'un point M trouvées par un certain calcul ou par un certain raisonnement (ce qui revient au même) soient x, y, z; faisons la *transformation continue* en A; appelons x', y', z' ce que deviennent les quantités x, y, z par la *transformation continue* en A, *ce qui ne veut pas dire que* x', y', z' *sont les coordonnées absolues d'un point*, il faut bien le remarquer.

Comme on a la formule

$$ax + by + cz = 2S,$$

on aura, par *transformation continue* en A de cette formule,

$$ax' - by' - cz' = -2S,$$

ce qui montre que $-x', y', z'$ sont les coordonnées d'un point M′. Ce point est le transformé de M.

Il suit de là que si $F(x, y, z, K, H...) = 0$, est une quelconque des équations du calcul qui a amené à la détermination de M, l'équation correspondante qui amènerait à la détermination de M′ est :

$$F(-x, y, z, K_1, H_1...) = 0,$$

en appelant K_1, H_1... le résultat de la *transformation continue* en A opérée sur K, H,.., etc.

Exemple I. — *Le lieu des points tels que la somme des perpendiculaires abaissées sur les côtés* CA *et* CB *d'un triangle* ABC, *soit* a + b, *est évidemment la droite donnée par l'équation :*

$$2Sx + 2Sy = (a + b)(ax + by + cz).$$

Faisant la *transformation continue* en A, de cette propriété, on a :

Le lieu des points tels que la différence des perpendiculaires abaissées sur CA *et sur* CB, *soit* a − b *est représenté par l'équation :*

$$2Sy - 2Sx = (a - b)(ax + by + cz).$$

Exemple II. — L'hyperbole H_a qui a pour foyers B et C et

passe en A a pour équation (*A. F.*, Congrès de Limoges, 1890, p. 136) :

$$(p-b)(p-c)(b^2y^2+c^2z^2)-bcyz[(p-a)^2+(p-b)^2]$$
$$+abc\,(c-b)\,x\,(z-y)=0.$$

Si l'on fait la *transformation continue* en A, le résultat trouvé reproduit H_a, et cela doit être puisque la différence des rayons vecteurs d'un point de H_a étant $b-c$ ou $c-b$ devient par cette transformation $c-b$ ou $b-c$ et qu'on a ainsi la même hyperbole.

Si l'on fait la *transformation continue* en B, c'est-à-dire celle où

$$a, b, c, p, (p-a), (p-b), (p-c), x, y, z, \text{etc.},$$

deviennent :

$$-a, b, -c, -(p-b), (p-c), -p, (p-a), x, -y, z, \text{etc.}$$

on trouve :

$$p(p-a)(b^2y^2+c^2z^2)+bcyz[p^2+(p-a)^2]+abc\,(c+b)\,x\,(z+y)=0,$$

qui représente l'ellipse E_a de foyers B et C et passant en A.

En résumé, pour faire la *transformation continue* en A dans une équation en coordonnées normales, il suffit de faire la transformation des coefficients et en outre de changer x en $-x$. On verrait de même que, pour faire la *transformation continue* en A dans une équation en coordonnées barycentriques, il suffit de faire la transformation sur les coefficients; que dans une équation cartésienne (CB axe des x, CA axe des y), il faut transformer les coefficients et changer y en $-y$, etc., etc.

Cette transformation est fort utile dans un grand nombre de questions; nous en avons déjà fait un fréquent usage.

Par exemple : Si G est le barycentre, H le point de concours des hauteurs;

I le point : $p-a$, $p-b$, $p-c$ (coordonnées normales);

I_a *son transformé continu* en A : p, $p-c$, $p-b$;

J le point : $\dfrac{1}{p-a}, \dfrac{1}{p-b}, \dfrac{1}{p-c}$;

J_a *son transformé continu* en A : $\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{p-c}, \dfrac{1}{p-b}$;

λ le point de *Gergonne* du cercle inscrit;

λ_a *son transformé continu en* A point de *Gergonne* du cercle ex-inscrit o_a.

Les points collinéaires G, I, J pour lesquels on a :

$$\frac{JG}{\delta} = \frac{JI}{6R} = \frac{GI}{2R - r},$$

se transforment en les points collinéaires G, I_a, J_a, pour lesquels on a :

$$\frac{J_aG}{\delta_a} = \frac{J_aI_a}{6R} = \frac{GI_a}{2R + r_a}.$$

On a : $$\overline{H\lambda}^2 = 4R^2 - \frac{8p^2R}{\delta^2}(2R - r),$$

ce qui donne :

$$\overline{H\lambda_a}^2 = 4R^2 - \frac{8(p-a)^2R}{\delta_a^2}(2R + r).$$

On sait que :

$$\text{Surface } oOH = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{8r},$$

ce qui donne :

$$\text{Surface } o_aOH = \frac{(b-c)(c+a)(b+a)}{8r_a}, \text{ etc.}$$

D'après ce qui précède, il est clair que, une question quelconque étant traitée à propos du triangle, il sera utile de voir ce qu'elle donne par *transformation continue*.

Il nous paraît évident qu'il n'y a pas à chercher de construction générale qui permette de déduire de M son transformé M_a en A, puisque M_a dépend du mode de liaison qui unit M aux éléments du triangle de référence; mais il y a cependant des théorèmes généraux qui relient une figure à sa *transformée continue*. Nous allons indiquer ceux qui se sont présentés à nous tout d'abord, mais il est probable que la question est loin d'être épuisée.

I. La droite de l'infini se transforme en elle-même, donc deux droites parallèles se transforment en deux droites parallèles.

II. Les points circulaires de l'infini se transforment l'un en l'autre.

III. Une courbe de degré n se transforme en une courbe de même degré, donc :

Si n points sont sur une ligne droite L, leurs transformés sont sur la droite L_a transformée de L.

IV. De II et de III on déduit qu'un cercle a pour transformé un cercle.

V. Si n droites sont concourantes en un point V, leurs transformées se coupent en un point V_a transformé de V.

VI. Si les longueurs de deux droites ou les valeurs de deux angles sont dans un rapport fixe indépendant des éléments du triangle de référence, ce rapport se conservera dans la *transformation continue.*

Corollaire 1. — Quatre points formant une division harmonique se transforment en quatre points formant une division harmonique.

Corollaire 2. — Une bissectrice d'un angle se transforme en une bissectrice de l'angle transformé.

VII. L'homographie, l'involution se conservent, ainsi que l'homologie et l'orthologie.

VIII. Deux droites rectangulaires se transforment en deux droites rectangulaires. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p, 36.)

---

202. — *Les centres isologiques n'existent qui si le triangle est acutangle.*

Les centres isologiques sont les deux points tripolairement associés aux réciproques du centre du cercle inscrit; leurs distances aux sommets sont proportionnelles aux côtés opposés.

Soient ka, kb, kc, les distances d'un de ces points aux sommets. On sait que l'on a, entre les carrés X, Y, Z, des distances d'un point aux sommets d'un triangle, la relation :

$$\sum a^2X^2 - \sum 2bc \cos A\,(YZ + a^2X) + a^2b^2c^2 = 0$$

d'où, pour déterminer k, l'équation :

$$k^4 \sum a^6 - \sum 2bc \cos A\,(b^2c^2k^4 + a^4k^2) + a^2b^2c^2 = 0,$$

$$k^4(\sum a^6 - \sum 2b^3c^3 \cos A) - 2abck^2 \sum a^3 \cos A + a^2b^2c^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation en k^2 est

$$2(a^2 + b^2 + c^2)a^2b^2c^2 \cos A \cos B \cos C,$$

qui n'est positif que si aucun des angles n'est obtus.

Quand le triangle est rectangle, k^2 n'a plus qu'une valeur, et les deux centres isologiques sont confondus en un seul point qui est diamétralement opposé, sur le cercle circonscrit, au sommet de l'angle droit.

On a alors la proposition suivante :

Les cercles symétriques des cercles d'Apollonius, par rapport aux médiatrices, sont, dans un triangle rectangle, tangents entre eux au même point du cercle circonscrit qu'ils coupent orthogonalement : la tangente commune en ce point est le diamètre de ce dernier cercle qui passe par le sommet de l'angle droit.

On peut observer que si l'équation précédente en k^2 a ses racines réelles, elles sont toutes deux positives, l'une d'elles convient à l'un des centres isologiques ; la seconde à l'autre centre.

En effet, pour qu'il en soit ainsi, il suffit que l'on ait :

$$\sum a^6 - \sum 2b^3c^3 \cos A > 0,$$

ou

$$\sum a^6 + 3a^2b^2c^2 > \sum b^2c^2(b^2 + c^2),$$

inégalité que l'on vérifie aisément.

203. — *Distances des centres isologiques.*

k^2, k'^2 étant les racines de l'équation en k^2 de l'exercice précédent, on a, pour la distance cherchée,

$$16S^2\delta^2 = (k^2 - k'^2)^2(\sum a^6 - \sum 2b^3c^3 \cos A).$$

Tenant compte de la valeur de $k^2 - k'^2$ tirée de l'exercice précédent :

$$\delta^2 = \frac{8a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \cos A \cos B \cos C}{\sum a^6 - \sum 2b^3c^3 \cos A},$$

$$\delta^2 = \frac{\sum 2b^4c^4 - \sum a^8}{\sum a^6 - \sum a^4b^2 + 3a^2b^2c^2},$$

204. — *Coordonnées barycentriques des centres isologiques.*

Soient α, β, γ les coordonnées barycentriques d'un de ces points ; on a, à un facteur constant près,

$$\alpha = a^2bc \cos A + k^2(c^2\, ac \cos B + b^2ab \cos C - a^4)$$

$$\alpha = a^2(b^2 + c^2 - a^2) + k^2\,(a^2c^2 + a^2b^2 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^4)$$

mais les centres isologiques étant situés sur la droite d'Euler, on a

(1) $$\frac{\alpha}{1 - m \operatorname{tg} A} = \frac{\beta}{1 - m \operatorname{tg} B} = \frac{\gamma}{1 - m \operatorname{tg} C},$$

d'où résultent : $$\frac{1 - m \operatorname{tg} A}{1 - m \operatorname{tg} B} = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$m = \frac{\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B\,(\alpha - \beta)}{\alpha \operatorname{cotg} A - \beta \operatorname{cotg} B}.$$

Remplaçant α, β, par leurs valeurs, il vient, tous calculs faits

$$m = \frac{1 + 3k^2}{1 + k^2} \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C,$$

valeur qui portée dans (1) détermine assez simplement α, β, γ.

205. — *Les distances des points* I, I′, I″, I‴, *aux droites qui leur sont harmoniquement associées, sont données par les formules :*

$$\delta . OI = 3Rr \qquad \delta' . OI' = Rr' \qquad \delta'' . OI'' = Rr'' \qquad \delta''' . OI''' = Rr'''.$$

(A suivre.)

QUESTION 414

Solution par B. SOLLERTINSKY.

THÉORÈME. — *Si, au double d'un nombre triangulaire on ajoute un carré, on obtient la somme de deux nombres triangulaires.*

(E. Catalan.)

On a

$$n(n+1)+m^2=\frac{2n^2+2m^2+2n}{2}=\frac{(n+m)^2+(n-m)^2+(n+m)+(n-m)}{2}$$

$$=\frac{(n+m+1)(n+m)}{2}+\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}$$

Nota. — Autre solution par M. E. Foucart, élève au lycée Michelet.

QUESTION 415

Solution par B. SOLLERTINSKY.

On a $$1\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)$$

(E. Catalan.)

De l'identité

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2n-m}=\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2n-m}\right),$$

il résulte

$$\sum\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n-m}\cdot\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}\sum\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2n-m}\right)$$

ce qui donne l'identité à établir, si le nombre n est pair; dans l'autre cas, on doit seulement retrancher, des deux membres, $\frac{1}{n^2}$.

QUESTIONS PROPOSÉES

431. — Par un point quelconque M d'une tangente à une parabole P, en un point B, on élève une perpendiculaire à cette droite, qui rencontre la directrice en A; puis l'on trace AB. Démontrer que la perpendiculaire à AB, issue de M est tangente à la parabole.

(Leinekugel.)

432. — Dans les piles de boulets 1° triangulaires; 2° quadrangulaires; quel est le nombre des points de contact de deux boulets?

Le premier nombre n'est jamais un carré.

Trouver dans quel cas le second est un carré.

(E. Lemoine.)

433. — Si ω tend vers λ, on a

$$\text{Lim}\ \frac{\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\beta)+\sin(\beta-\omega)}{\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\alpha)+\sin(\alpha-\omega)}=\left(\frac{\sin\dfrac{\lambda-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\lambda-\alpha}{2}}\right)^2.$$

(E. Lemoine.)

ERRATA

Page 271 (1891) : ligne 10 en remontant, *lisez* R^2 au lieu de II^2.

Page 25 (Février) : ligne 12, *lisez : des cercles-exinscrits*, au lieu de : d'un cercle exinscrit.

Page 29, ligne 10 en remontant, *lisez :* r au lieu de R.

Page 262 (1891) au lieu de :

$$\rho' = \frac{2r\sin^2\alpha}{2\sin\alpha-1}, \quad \textit{lisez :}\ \rho' = \frac{2r\cos^2\alpha}{2\cos\alpha-1}.$$

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3884-2-92.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, voir page 49.)

§ XXII *bis*. — L'application de la méthode d'inversion symétrique, aux couples isoptiques, est fondée sur le théorème suivant :

Théorème préliminaire. — *Les transformés de deux points isoptiques sont isogonaux relativement au triangle* LBC, *où* L *est le transformé de l'orthocentre (ou l'isocyclique de* O*); et réciproquement, si deux points sont isogonaux relativement à* LBC, *leurs transformés sont isoptiques.*

Cette proposition a été déjà obtenue (*J. E.* août 1891, p. 180), comme cas particulier d'un théorème plus général. Une raison directe très simple est que si M, N sont isoptiques, les circonférences MAC, NAC ont pour transformées deux droites Bm, Bn symétriques relativement à AB; de même, Cm, Cn sont symétriques relativement à AC. De sorte que les angles en B, dans les triangles mBC, nBC, ont pour somme 2B; les angles en C pour somme 2C. Par suite m, n sont isogonaux relativement au triangle LBC dont les angles en B et C sont 2B et 2C. Même explication retournée pour la réciproque.

Remarque importante. — Les angles de LBC étant doubles de ceux de ABC, A est le centre de l'un des quatre cercles tangents aux trois côtés de LBC, les trois autres sont le point S diamétralement opposé à A, sur la circonférence ABC, et les points Y, Z où la perpendiculaire en L, à AS, rencontre AC et AB, lesquels sont aussi situés respectivement sur les perpendiculaires à AB en B et à AC en C. On peut, dans le théorème préliminaire, substituer au triangle ABC l'un quelconque des trois triangles SBC, YBC, ZBC, le pôle d'inversion symétrique étant alors ou S ou Y ou Z, et la puissance d'inversion SB, SC ou YB, YC ou ZB, ZC.

Autre forme du théorème préliminaire. — *Lorsque*

deux points sont isogonaux, leurs transformés relativement au triangle IBC, *où* I *désigne le centre de l'un quelconque des quatre cercles tangents aux côtés de* ABC, *sont isoptiques relativement à* IBC *et réciproquement.*

C'est évidemment le même théorème où L est remplacé par A et A par I.

Par ce théorème toute propriété concernant les couples isoptiques est transformable en une propriété relative aux couples isogonaux et réciproquement.

Voici d'abord quelques exemples de la première transformation.

1° De ce que sur chaque hauteur et sur chaque côté il y a une infinité de couples isoptiques ayant le pied de cette hauteur pour centre, on conclut que *sur chaque bissectrice il y a une infinité de couples de points isogonaux qui sont en division harmonique avec ceux des quatre centres* I, I_a, I_b, I_c *qui sont sur cette bissectrice, et que sur chacun des cercles ayant pour diamètre la droite qui joint deux de ces quatre centres il y a une infinité de couples isogonaux formés de deux points symétriques relativement à ce diamètre.* C'est ce qu'on voit en raisonnant sur AH et BC et remplaçant, après transformation, L par A et A et S par deux des quatre centres I, I_a, I_b, I_c, ou mieux en appliquant le théorème préliminaire sous sa seconde forme et transformant relativement à l'un des triangles IBC, I_aBC, etc.

Il est à remarquer que si I par exemple étant le pôle de transformation on raisonne sur BH et AC ou CH et AB, au lieu de AH et BC, les deux mêmes conclusions se présentent dans un ordre inverse, car c'est alors la hauteur qui se transforme en cercle et le côté en droite.

2° La proposition que : *sur le cercle qui a pour diamètre un des côtés*, BC, *il y a une infinité de couples isoptiques passant par le milieu de* AH, redonne la seconde partie de 1°; mais le fait que les points isogonaux *m*, *n* sont symétriques, relativement à I_bI_c, s'y présente sous cette forme que nous notons en vue d'une transformation ultérieure : *le cercle* Imn *passe par le symétrique de* I *relativement à* I_bI_c; *de même, le cercle* $I_a$mn *par le symétrique de* I_a. Il est intéressant de suivre cette transformation. Soit MN un couple isoptique relativement à IBC,

situé sur la circonférence qui a BC pour diamètre. Le transformé de cette circonférence, relativement à IBC, est un cercle qui passe par B, C, et qui est orthogonal au cercle IBC : c'est le cercle décrit sur I_bI_c pour diamètre. Les transformés *m*, *n* de M, N forment donc un couple isogonal situé sur ce cercle. Et comme MN passe par le milieu U, de IH_1, où H_1 est l'orthocentre de IBC et que H_1 a pour transformé A, le cercle I*mn*, transformé de MN, passe par le symétrique de I relativement à A ; ou, ce qui revient au même, le symétrique de I relativement à I_bI_c. — On peut permuter I avec I_a, et aussi permuter I, I_a avec I_b, I_c.

En transformant la proposition : *sur le cercle qui a pour diamètre* AH *il y a une infinité de couples isoptiques qui passent par le milieu de* BC, on obtient cet énoncé, qui sera aussi l'objet, plus loin, d'une transformation nouvelle : *Sur la droite qui joint deux des quatre points* I, I_a, I_b, I_c, *par exemple sur* I_b, I_c *il y a une infinité de couples isogonaux* mn, *tels que la circonférence* Imn *ou* $I_a$mn *passe par le point harmoniquement opposé à* I *ou* I_a *relativement à* BC.

Le rapprochement de ce résultat et de la première partie de 1° montre *que les circonférences qui passent par* I *et le point qui lui est harmoniquement opposé, relativement à* BC, *divisent* I_bI_c *harmoniquement. Cette propriété subsiste pour toute circonférence qui passe par* I_a *et son opposé harmonique relativement à* BC. En particulier, ainsi qu'on peut du reste le vérifier facilement, *la symédiane issue de* I, *dans* IBC, *passe par le milieu de* I_bI_c, *et aussi la symédiane issue de* A, *dans* I_aBC.

3° Si M, N sont isoptiques, les circonférences MBC, NBC sont symétriques relativement à BC. Cette proposition évidente se transforme en celle-ci : *Si* m, n *sont isogonaux, les circonférences* mBC, nBC *ont leurs points conjugués deux à deux relativement au cercle qui a pour diamètre* II_a, *et conjugués deux à deux relativement au cercle qui a* I_bI_c *pour diamètre*. Résultat qui a été déjà rencontré dans le chapitre des cercles symétriquement inverses.

4° Le théorème principal *que le centre de tout couple isoptique est sur le cercle des neuf points* donne ce théorème également remarquable :

Théorème. — *Le lieu du point harmoniquement opposé à l'un des centres* I, I_a, I_b, I_c, *relativement à la droite qui joint deux points isogonaux quelconques, est le cercle qui passe par les trois autres centres.*

Car si M, N sont isoptiques relativement à IBC, le milieu P de MN étant sur la circonférence formée par les pieds des hauteurs de IBC, et ces pieds ayant pour transformés, relativement à IBC, les centres I_a, I_b, I_c, le point *p* harmoniquement opposé à I relativement à *mn* est sur la circonférence $I_aI_bI_c$. Et l'on peut présenter I avec l'un quelconque des trois autres centres.

5° Le lemme sur lequel nous avons établi la démonstration du théorème principal se transforme ainsi :

Théorème. — m, n *étant un couple isogonal quelconque*, d *le point harmoniquement opposé à* I, *relativement à* BC; e, f *les conjugués de* I *relativement aux cercles* mBC, nBC, *si* μ_1 *est l'intersection d'une circonférence passant par* I *et* m *et tangente à la circonférence* Ide, *avec une circonférence passant par* I *et* d *et tangente à la circonférence* Ime, *et* ν_1 *l'intersection d'une circonférence passant par* I *et* n *et tangente à la circonférence* Idf *avec une circonférence passant par* I *et* d *et tangente à la circonférence* Inf, *la circonférence* $I\mu_1\nu_1$ *passe par un point fixe, qui est le point* I′ *symétrique de* I *relativement à* A. — *De plus les distances de* μ_1 *et* ν_1 *à* I *et* d *sont proportionnelles. Et le lieu de la rencontre de la circonférence* $I\mu_1\nu_1$ *avec une circonférence orthogonale, menée par* I *et* d *est la circonférence* $I_aI_bI_c$. On peut permuter I avec I_a ou I_b ou I_c.

m, *n* sont, en effet, les transformés, relativement à IBC, d'un couple isotique M, N; *d* est le transformé de D milieu de BC; *e*, *f* sont les transformés des centres E, F des cercles MBC, NBC_1; μ_1 est le transformé de μ, rencontre des parallèles menées par M à DE et par D à EM. De même, ν_1 est le transformé de ν; enfin I′ est le transformé du milieu de la distance de I à l'orthocentre de IBC′; de sorte que $\mu\nu$ passant par ce milieu, la circonférence $I\mu_1\nu_1$ passe par I′.

Comme μ, ν sont sur une circonférence qui a D pour centre, μ_1, ν_1 sont sur une circonférence dans laquelle I et *d* sont

conjugués, de sorte que

$$\frac{\mu I}{\mu_1 I} = \frac{\mu d}{\mu_1 d}.$$

Enfin, le lieu des projections de D sur $\nu\mu$ étant la circonférence des neuf points de IBC, la troisième propriété de l'énoncé résulte de cette remarque :

6° L'existence d'une infinité de couples isoptiques MN, M_1N_1 normalement associés deux à deux, c'est-à-dire de même centre P et où MM_1, NN_1 sont perpendiculaires à un des côtés, à BC par exemple, prouve *qu'à chaque point* p, *du cercle* $I_aI_bI_c$, *correspondent une infinité de systèmes de deux couples isogonaux*, mn, m_1n_1, *où* m *et* n, m_1 *et* n_1 *sont harmoniquement opposés relativement à* Ip *et où les circonférences* Imm_1, Inn_1 *sont tangentes à* IA.

De la propriété que *les cercles décrits sur* MM_1, NN_1 *comme diamètres, sont isogonaux au cercle qui a* BC *pour diamètre*, il suit que *le cercle qui passe par* mm_1 *et est orthogonal au cercle* Imm, *et le cercle qui passe par* n, n_1 *et est orthogonal au cercle* Inn_1 *sont orthogonaux au cercle décrit sur* I_bI_c *pour diamètre*. Même chose, en permutant I en I_a.

§ XXII *ter*. — Passons aux exemples de la transformation inverse.

Nous supposerons des points isogonaux relativement à LBC ; et, transformant par rapport à ABC, de toute propriété relative à ces points isogonaux, nous conclurons une propriété concernant les points isoptiques.

1° *Le point* L *a pour isogonal, relativement à* LBC, *un point quelconque de* BC devient : *Le point* H *a pour isoptique un point quelconque du cercle* ABC.

Un point à l'infini a pour isogonal, relativement à LBC, *un point arbitraire de la circonférence* LBC devient : *Le point* A *a pour isoptique un point quelconque de la circonférence* HBC. — Même propriété naturellement pour B et C.

Chacun des centres A, S, Y, Z, *des quatre cercles tangents aux côtés de* LBC *est son propre isogonal, relativement à* LBC, devient : *Tout point à l'infini est son propre isoptique, ainsi que les pieds* $H_aH_bH_c$ *des trois hauteurs.*

2° La bissectrice LSA de l'angle BLC ayant pour transformée la hauteur AH, les deux droites LM, LM' qui aboutissent à deux points M, M' isogonaux relativement à LBC ont pour transformées deux circonférences MAH, M'AH symétriques relativement à AH, et l'on retrouve ainsi cette importante propriété, déjà directement établie : *Lorsque deux points* m, m' *sont isoptiques relativement à* ABC, *ils le sont aussi relativement aux trois triangles* HBC, HCA, HAB.

Remarque. — De cette propriété ainsi établie par transformation, on peut, par une transformation inverse, différemment appliquée, déduire une nouvelle propriété des points isogonaux. Considérons deux points P, Q isoptiques relativement à IBC, et désignons par K l'orthocentre de IBC; les circonférences PBK, QBK sont, d'après ce qui vient d'être dit, symétriques relativement à BK. Or BK a pour transformée, relativement à ICB, la circonférence ICA, c'est-à-dire la circonférence qui a II_b pour diamètre. De là ce théorème sur les points isogonaux :

Théorème. — p, q *étant deux points isogonaux, les deux circonférences* pAC, qAC *coupent la circonférence de diamètre* II_b *sous des angles égaux et de signes contraires, ainsi que la circonférence de diamètre* I_aI_c (comme on le voit en raisonnant sur I_aBC). *De même, les circonférences* pAB, qAB *coupent, sous des angles égaux et de signes contraires, la circonférence de diamètre* II_c, *ainsi que la circonférence de diamètre* I_aI_b.

3° **Théorème.** — *Etant considérées deux circonférences symétriques relativement à* AH *et qui passent par* A *et* H ; *si* M, N *sont deux points quelconques de la première, et* M', N' *leurs isoptiques, situés sur la seconde, les circonférences* AMN' ANM' *se coupent sur la circonférence* HMN'; HNM' *se coupent sur la circonférence* HBC.

Car, d'après une propriété connue sur les points isogonaux, si m, m' et n, n' sont deux couples isogonaux relativement à LBC, situés sur les deux mêmes antiparallèles Lmn, L$m'n'$ relativement à l'angle L, les droites mn', nm' se coupent sur BC, et les circonférences Lmn', Lnm' se coupent sur la circonférence LBC (§§ XIX).

4° **Théorème.** — *Si* M, M′ *sont isoptiques, la seconde rencontre* N *des circonférences* BCM, AHM, *et celle* N′ *des circonférences* BCM′, AHM′ *sont aussi isoptiques.* — *Les circonférences* AMM′, ANN′ *sont tangentes, ainsi que les circonférences* HMM′, HNN′. — *Si* E, E′ *sont les points d'intersection de la circonférence* HBC *avec les circonférences* AHM, AHM′, *et* F *le point harmoniquement opposé à* A, *relativement à* EE′, *les circonférences* AMM′ ANN′ *sont, chacune, le lieu des points harmoniquement opposés aux points de l'autre, relativement à* AF. — *On a les relations* $\frac{HM.HN'}{AM.AN'} = \frac{HN.HM'}{AN.AM'} = \frac{HB.HC}{AB.AC}$.

Le premier point provient de ce que, si m, m' sont isogonaux relativement à LBC, leurs isocycliques n, n', relativement à L et BC sont isogonaux.

— Le second, de ce que mm', nn' sont parallèles, et les circonférences Lmm', Lnn' sont tangentes.

— Le troisième, de ce que mm', nn' sont symétriques relativement au milieu f de ee', où e, e' sont les rencontres de la circonférence LBC par Lm, Lm'.

— Le quatrième, enfin, de ce que l'on a

$$Lm.Ln' = Ln.Lm' = LB.LC.$$

Remarquons qu'on peut, suivant une indication générale, permuter A et H dans le troisième point, qui se complète ainsi : *Si* D, D′ *sont les rencontres de la circonférence* ABC *avec les circonférences* AHM, AHM′ *et* G, *le point harmoniquement opposé à* H *par rapport à* DD′, *les circonférences* HMM′, HNN′ *sont chacune le lieu des points harmoniquement opposés aux points de l'autre relativement à* HG. C'est ce qui résulterait aussi de la symétrie de mm', nn' relativement à f, transformée relativement à LBC.

5° **Théorème.** — *Étant données deux circonférences* γ, γ' *passant par* A *et* H *et symétriques relativement à* AH, *si l'on considère les deux circonférences qu'on peut faire passer par* B, C *tangentiellement à* γ, *et que* M′, N *soient les isoptiques des points de contact* M, N, *les circonférences* M′BC, N′BC *sont tangentes à* γ', *en* M′ *et* N′. — *Les circonférences* AMN′, ANM′ *sont tangentes.* — *Les circonférences* AMM′, ANN′ *passent par le point* F, *consi-*

déré dans la question précédente, E, E′ *étant ici les rencontres de la circonférence* HBC *avec les circonférences* γ, γ'. — *On a les relations*

$$\frac{\text{HM}.\text{HM}'}{\text{AM}.\text{AM}'} = \frac{\text{HN}.\text{HN}'}{\text{AN}.\text{AN}'} = \frac{\text{HB}.\text{HC}}{\text{AB}.\text{AC}}.$$

Il suffit de se reporter au problème du § XVI : *Déterminer, sur deux droites isogonales données, deux points isogonaux qui soient les tranformés l'un de l'autre;* puis, en appliquant ce problème au triangle LBC, de transformer relativement, à ABC, les propriétés qui y sont établies.

Même observation que plus haut sur la permutation de A et H, de sorte que *Les circonférences* HMN′, HNM′ *sont tangentes, et les circonférences* HMM′, HNN′ *passent par le point* G *de* 4°.

6° **Problème.** — *Sur deux circonférences données* γ, γ', *qui passent par* A *et* H *et sont symétriques relativement à* AH, *déterminer deux points isoptiques* M, M′ *tels, que la circonférence* AMM′, *ou bien la circonférence* HMM′, *passe par un point donné* P.

Si m, m', p sont les transformés de M, M′, P, et Ld, Ld' les droites transformées des circonférences γ, γ', on est ramené à déterminer, sur ces droites, deux points m, m' isogonaux relativement à LBC, et tels, que la droite mm', ou la circonférence Lmm', passe par un point donné p. C'est le problème 1 du § XVII. — On construira donc m, m' d'après ces conditions, et leurs transformés M, M′ seront les points cherchés.

7° **Théorème.** — M, M′ *étant deux points isoptiques, si l'on coupe les trois circonférences* ABC, AHB, AHC *en* P, Q, R *par trois circonférences qui leur sont respectivement orthogonales et qui passent par* A *et* M, *et en* P′, Q′, R′ *par trois circonférences également orthogonales menées par* A *et* M′, *les six points* P, Q, R, P′, Q′, R′ *sont situés sur une même circonférence* α. *Et si* K *est le point harmoniquement opposé à* A, *relativement à* MM′, *les axes radicaux d'un cercle passent par* A *et* H *avec chacun des six points considérés comme un cercle de rayon seul concourent en un même point qui est le centre du cercle* α. — *Même proposition en permutant* A *et* H.

La première partie n'est que la transformation évidente du théorème sur les podaires pqr, $p'q'r'$ des points m, m' sur les côtés du triangle LBC, relativement auquel ils sont iso-

gonaux. La seconde partie résulte de ce que K étant le transformé du milieu de mm', c'est-à-dire du centre du cercle circonscrit aux deux podaires, A et K sont conjugués relativement au cercle α. Si donc ω est le centre de ce cercle $\omega K.\omega A = \overline{\omega P}^2$, ce qui exprime que ω est sur l'axe radical du cercle-point P et d'un cercle quelconque passant par A et K.

Remarque. — Faisons observer, en passant, que cette dernière considération permet de construire un cercle α dont on connaît un point P et relativement auquel deux points donnés A, K sont conjugués. Il suffit de faire passer deux cercles par A et K, la rencontre des axes radicaux de chacun et du cercle-point P donne le centre ω du cercle α, — ou, ce qui revient au même, — la rencontre des polaires de P, relativement à ces deux cercles, donne le point diamétralement opposé à P sur le cercle α.

Nous terminerons ces exemples, qu'on pourrait aisément multiplier, par la transformation de la relation caractéristique de deux points isogonaux situés sur deux droites isogonales données.

8° Soient deux circonférences γ, γ' qui passent par A et H et sont symétriques relativement à AH, D, D′ leurs intersections par la circonférence ABC, E, E′ leurs intersections par la circonférence ABC, M, M′ deux points isoptiques quelconques situés sur γ, γ'. Considérons les transformées d, d', e, e', m, m' ; m, m' isogonaux relativement à LBC, sont situés sur les droites Lde, L$d'e'$ qui rencontrent BC en d, d' et la circonférence LBC en e, e'. La relation à transformer est $em.e'm' = \text{const.} = e\text{L}.e'd'$.

La transformation donne $\dfrac{\text{EM}.\text{E}'\text{M}'}{\text{AM}.\text{AM}'} = \text{const.}$

Cette constante s'obtient en supposant M en H et M′ en D′, ou M en D et M′ en H, de sorte que $\dfrac{\text{EM}.\text{E}'\text{M}'}{\text{AM}.\text{AM}'} = \dfrac{\text{EH}.\text{E}'\text{D}'}{\text{AH}.\text{AD}'}$. Mais, ainsi obtenue sans avoir égard aux signes des longueurs, pour chaque point M pris sur γ, elle donnerait, sur γ', deux points dont un seul serait l'isoptique de M. Ces deux points de γ' qui répondent à une même valeur de $\dfrac{\text{E}'\text{M}'}{\text{AM}'}$ sont, par suite, har-

moniquement opposés l'un à l'autre, relativement à E'A; ils sont donc de part et d'autre de E'A. Nous allons montrer qu'il faut choisir celui qui est du même côté de E'A que D', si M est du même côté de EA que H; et faire contraire dans le cas contraire, ce qui revient à dire qu'il convient, dans la relation, de regarder les deux rapports $\frac{\text{EM}}{\text{AM}'}$, $\frac{\text{EH}}{\text{AH}}$ comme de même signe ou de signes contraires, selon que M et H sont ou ne sont pas d'un même côté de EA, et les rapports $\frac{\text{E}'\text{M}'}{\text{AM}'}$, $\frac{\text{E}'\text{D}'}{\text{AD}'}$ comme de même signe ou de signes contraires, selon que M' et D' sont ou ne sont pas d'un même côté de E'A.

En effet, dans la relation initiale, qu'on peut écrire $\frac{em}{e\text{L}} \cdot \frac{e'm'}{e'd'} = 1$, le rapport $\frac{em}{e\text{L}}$ est positif ou négatif, selon que m et L sont ou ne sont pas d'un même côté de e, le rapport transformé $\frac{\text{EM}}{\text{AM}'}$, $\frac{\text{EH}}{\text{AH}}$, pour lui être égal en grandeur et en signe, doit être regardé comme positif ou négatif suivant que m et n sont ou ne sont pas d'un même côté de EA. De même, $\frac{\text{E}'\text{M}'}{\text{AM}'}$, $\frac{\text{E}'\text{D}'}{\text{AD}'}$, suivant que M' et D' sont ou ne sont pas d'un même côté de E'A.

On peut, dans la relation $\frac{\text{EM}.\text{E}'\text{M}'}{\text{AM}.\text{A}'\text{M}'} = \text{const.}$, permuter A et M, ce qui donne $\frac{\text{DM}.\text{D}'\text{M}'}{\text{HM}.\text{H}'\text{M}'} = \text{const.}$ où la constante s'obtient en supposant M en A et M' en E', ou M en E et M' en A. On parvient aussi à cette égalité en transformant la relation connue $\frac{dm.d'm'}{\text{L}m.\text{L}m'} = \text{const.}$ — Enfin les formules

$$\frac{em}{dm}\,\text{L}m' = \text{const. et } \frac{e'm'}{d'm'}\,\text{L}m = \text{const.}$$

conduisent à

$$\frac{\text{EM}}{\text{DM}} \cdot \frac{\text{HM}'}{\text{AM}'} = \text{const.}, \quad \frac{\text{E}'\text{M}'}{\text{D}'\text{M}'} \cdot \frac{\text{HM}}{\text{AM}} = \text{const.}$$

(A suivre.)

EXERCICES ÉLÉMENTAIRES SUR LA PARABOLE

Par M. **Sollertinsky.**

1. Théorème. — *Sur la médiane* AM *d'un triangle* ABC, *on porte* AD = AD′. *L'intersection* P *des droites* BD, CD′ *parcourt une parabole circonscrite au triangle et ayant* AM *pour diamètre* (fig. 1).

Soit N le point où la parallèle à BC, menée de P, rencontre AN.

On a $\frac{D'N}{D'M} = \frac{PN}{CM} = \frac{PN}{MB} = \frac{ND}{DM}$.

Donc

$$\frac{PN}{CM} = \frac{D'N + DN}{D'M + DM} = \frac{D'N - ND}{D'M - DM},$$

ou $$\frac{PN}{CM} = \frac{AD}{AM} = \frac{AN}{AD}.$$

Par suite

$$\frac{PN^2}{CM^2} = \frac{AD.AN}{AM.AD} = \frac{AN}{AM}.$$

En posant $\frac{\overline{CM}^2}{AM} = 2p'$,

on a donc $\overline{PN}^2 = 2p'.AN$,

Fig. 1.

ce qui démontre la proposition (voir *J. E.*, 1890, p. 133, § 54).

Inversement. — *Les droites joignant deux points fixes* B,C *d'une parabole à un troisième point quelconque* P *rencontrent le diamètre de la corde* BC *aux points* D,D′ *équidistants de l'extrémité du diamètre.*

En effet, A′ étant cette extrémité, on aurait

$$\frac{A'N}{A'M} = \left(\frac{PN}{CM}\right)^2 = \frac{AN}{AM}.$$

Corollaires. — 1° *Trois points* P, B, C, *et la direction de l'axe, déterminent une seule parabole;* car le diamètre de BC ayant la même extrémité A pour toutes les paraboles PBC, le paramètre correspondant est parfaitement déterminé.

2° *Deux paraboles dont les axes sont parallèles ne peuvent avoir plus de deux points communs.*

Remarques. — 1° On peut effectuer toutes les constructions en ne se servant que de la règle et de l'équerre.

2° Les droites BD′, CD se rencontrent au point P′, tel que PP′, CB sont parallèles. De là une solution du problème : *construire, point par point, une parabole circonscrite à un trapèze* PP′BC. On trouve les points D, D′, puis le milieu A de DD′, etc. (*).

3° Si la parallèle à CP, menée par B, rencontre AM en δ, on a $M\delta = MD'$. Par suite

$$D\delta = DM + M\delta = DM + D'M = 2AM = \text{const.}$$

Conséquemment : *L'angle* BPC *étant inscrit à une parabole, et s'appuyant toujours sur deux points fixes* B, C *de la courbe, les parallèles aux côtés de l'angle, menées d'un point fixe* O *du plan, interceptent la même longueur* RS *sur une droite fixe parallèle à l'axe*;

Le sommet O *d'un triangle* ORS *reste fixe et sa base invariable* RS *glisse sur elle-même. Les parallèles aux côtés* OR, OS, *menées respectivement par deux points fixes* B, C, *se rencontrent sur la parabole passant par* B, C. *L'axe de cette parabole est parallèle à* RS.

2. *Construction du foyer et de la directrice* (fig. 2). — La circonférence décrite de A comme centre avec le rayon AM, rencontrera BC en M′. Sur les droites AM, AM′ on porte $AE = AE' = \dfrac{BM}{2}$.

La parallèle à ME′, menée par E, coupe AM′ au foyer F de la parabole ; et la perpendiculaire sur AM, élevée au point δ tel que $\delta A = AF$, est la directrice.

En effet, on a $\dfrac{AF}{AE'} = \dfrac{AE}{AM}$; d'où $\overline{AE}^2 = AF.AM$, ou $\overline{BM}^2 = 4AF.AM$.

Fig. 2.

Puis, la tangente en A, étant parallèle à MM′, est la bissectrice intérieure de l'angle δAF.

(*) Comp. M. de Longchamps. *Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre. J. E.*, pp. 201-202.

3. *Le paramètre* (fig. 2). — Soit F′ la projection de F sur AM. Le demi-paramètre de la parabole

$$p = \delta F' = \delta A + AF' = AF(1 - \cos 2\alpha) = 2AF \sin^2 \alpha,$$

α désignant l'angle $\widehat{AMB}$. Par suite

$$2p = \frac{\overline{BM}^2 \sin^2 \alpha}{AM} = \frac{(AM.BM.\sin\alpha)^2}{AM^3} = \frac{ABC^2}{AM^3}. \quad (1)$$

Remarque. — Les tangentes aux points B, C se rencontrent, sur AM, au point A′ tel que A′M = 2AM; car si l'on a AD = AD′ = AM *(fig. 1)*, le point P coïncide avec C, et la droite CD′ devient tangente en C. En posant S = l'aire A′BC = 4ABC, on déduit de (1)

$$p = \frac{S^2}{A'M^3};$$

c'est un théorème de M. Artzt (Comp. M. de Longchamps, *J. E.*, 1890, p. 149).

4. Problème. — *Au triangle donné* PBC, *circonscrire une parabole, étant donnée la direction de l'axe* (fig. 1).

La parallèle à la direction donnée, menée du milieu M de BC, rencontre les côtés PB, PC du triangle aux points D, D′. Soit A le milieu de DD′. La parabole ABC, construite de la manière indiquée dans le théorème 1, est la parabole cherchée.

Soient : Q le point où la parallèle à l'axe, menée par P, rencontre BC; S, R, B, C l'aire, le rayon du cercle circonscrit et deux angles du triangle PBC; α l'angle compris entre BC et l'axe.

De la relation

$$\left(\frac{CM}{QM}\right)^2 = \frac{AM}{AN}$$

on déduit

$$\frac{\overline{CM}^2}{\overline{MC}^2 - \overline{QM}^2} = \frac{AM}{PQ};$$

d'où

$$\frac{\overline{CM}^2}{AM} = \frac{BQ.QC}{PQ}.$$

Donc, d'après (1), le paramètre de la parabole,

$$2p = \frac{BQ.QC \sin^2\alpha}{PQ}.$$

Mais

$$BQ \sin\alpha = BP \sin(\alpha + B),$$
$$CQ \sin\alpha = CP \sin(\alpha - C)$$

et, h étant la hauteur de PBC relative à BC,

$$BP.CP = 2R.h = 2R.PQ \sin\alpha.$$

Par suite,

$$p = R \sin \alpha . \sin (\alpha + B) . \sin (\alpha - C). \qquad (2)$$

(Comp. M. KOEHLER, *Exercices de Géométrie*, t. I, p. 44.

On peut donner, du paramètre, une autre expression. Des relations $\dfrac{ABC}{AM} = \dfrac{S}{PQ}$, $AM = \dfrac{PQ.\overline{CM}^2}{BQ.QC}$

on déduit, d'après (1)

$$2p = \frac{S^2}{PQ^3} \cdot \frac{BQ.QC}{CM^2};$$

puis, si le point Q divise BC dans le rapport $\dfrac{m}{n}$,

$$\frac{S^2}{\overline{PQ}^2} = \frac{(m+n)^2}{2mn} \cdot p \qquad (3)$$

5. Théorème. — *Une transversale, parallèle à la direction donnée, rencontre les côtés d'un triangle* ABC *aux points* A′, B′, C′. *Le point* M *de cette transversale tel que* $\dfrac{B'M}{MC'} = \dfrac{CA'}{A'B}$ *appartient à la parabole circonscrite au triangle donné et ayant son axe parallèle à la direction donnée* (fig. 3).

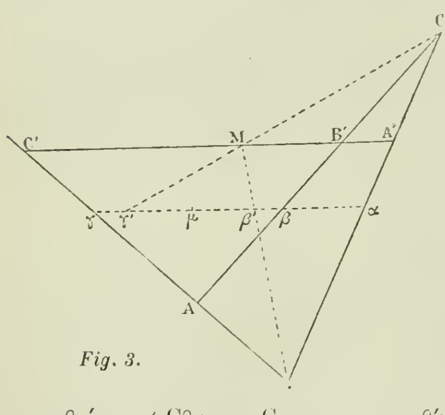


Fig. 3.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ les points correspondants à la transversale passant par le milieu α de BC : le point μ est donc le milieu de $\beta\gamma$. Je dis que BM, CM rencontrent $\beta\gamma$ aux points β', γ' équidistants de μ. On a, en effet,

$$\frac{\beta\gamma'}{B'M} = \left(\frac{C\beta}{CB'}\right) = \frac{C\alpha}{CA'}, \qquad \frac{\beta'\gamma}{MC'} = \left(\frac{\beta' B}{MB}\right) = \frac{\alpha B}{A'B};$$

et, en divisant ces proportions, on trouve $\beta\gamma' = \beta'\gamma$.

Mais, les points β', γ' étant équidistants de μ, le point M appartient à la parabole $C\mu AB$ (Théor. 1).

Corollaire. — *Les droites joignant un point* A *d'une para-*

bole aux extrémités d'une corde donnée BC *interceptent, sur un diamètre quelconque* MA′, *le segment* B′C′ *divisé par la courbe, dans le rapport des segments déterminés, par ce diamètre, sur la corde* BC (*).

6. Théorème. — A, A′ *étant deux points d'une parabole, symétriques par rapport à l'axe, toute corde* BC *vue de l'un de ces points* A, *sous l'angle droit, intercepte, sur le diamètre passant par l'autre point* A′, *une longueur* A′D *égale au paramètre de la parabole* (fig. 4).

Soient B′, C′ les points où le diamètre A′D rencontre les cordes AC, AB. D'après le théorème démontré (§ 5, cor.), on a

Fig. 4.

$$\frac{DA'}{A'C'} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{CB'.B'A}{\overline{B'A}^2} = \frac{CB'.B'A}{A'B'.B'C'},$$

d'où
$$DA' = \frac{CB'.B'A}{A'B'} \cdot \frac{A'C'}{B'C'}.$$

Si l'on pose
$$\widehat{C'B'A} = \alpha,$$

on a
$$\frac{A'C'}{BC'} = \left(\frac{AC'}{B'C'}\right)^2 = \sin^2\alpha.$$

Par suite
$$DA' = \frac{CB'.B'A.\sin^2\alpha}{A'B'},$$

expression du paramètre de la parabole A′AC, ayant A′B′ pour un diamètre (§ 4), et celle-ci coïncide avec la parabole donnée.

Corollaire. — Si l'angle droit BAC tourne autour de A, la corde BC passe par un point fixe D; lorsque AB devient tangente en A, BC coïncide avec l'autre côté AC de l'angle

(*) M. Ch. Taylor. *An Introduction to the ancient and modern Geometry of conics.* 1881, p. 65, ex. 123.

droit, c'est-à-dire que BC devient la normale en A. On a ainsi démontré, pour la parabole, le *théorème de Frégier :*

Si autour d'un point fixe d'une conique, comme sommet, on fait tourner un angle droit, la corde variable, que ses côtés interceptent dans la conique, passe par un point fixe, situé sur la normale au sommet de l'angle.

Corollaire. — *Le lieu des points de Frégier, d'une parabole, est une autre parabole égale à la première;* car celle-ci étant transportée parallèlement à l'axe, à la distance $2p$, le point A′ vient en D.

7. Problème. — *Construire une parabole qui passe par quatre points donnés* A, B, C, D (fig. 5).

Pour que le point D appartienne à l'une des paraboles circonscrites au triangle ABC, il faut et il suffit que le diamètre de cette parabole, mené par D, rencontre les côtés de ABC aux points A′, B′, C′, tels que $\frac{B'D}{DC'} = \frac{CA'}{A'B}$.

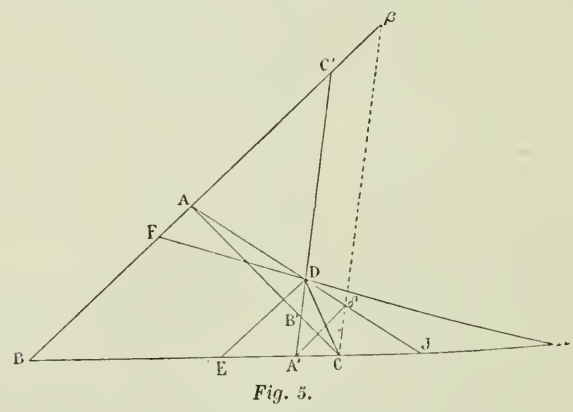


Fig. 5.

Si le diamètre du point C rencontre AD, AB aux points δ, β, on a

$$\frac{C\delta}{\delta\beta} = \left(\frac{B'D}{DC'}\right) = \frac{CA'}{A'B};$$

donc les droites δA′, AB sont parallèles. Par suite, si la parallèle à AB, menée par D, rencontre BC en E, on a

$$\frac{JC}{JA'} = \left(\frac{J\delta}{JD}\right) = \frac{JA'}{JE},$$

J étant l'intersection des côtés AD, BC.

De là, résulte la construction suivante : D'un sommet D du quadrilatère donné ABCD, on mène la parallèle DE à l'un des côtés, AB, de l'angle opposé B, jusqu'à la rencontre avec l'autre côté BC de l'angle. Sur ce côté, du point de son intersection J avec le côté opposé, on prend les points A′, A″ tels que $JA'^2 = JA''^2 = JC.IE$ (*). Les droites DA′, DA″ donnent la direction des axes des deux paraboles possibles, et le problème se réduit à celui qui a été déjà résolu (§ 4).

Si l'un des quatre points donnés, D, par exemple, se trouve à l'intérieur du triangle ABC formé par les trois autres, le problème devient impossible, car alors les rapports $\frac{B'D}{DC'}$ et $\frac{CA'}{A'B}$ sont de signes contraires.

Corollaire. — Si deux paraboles P, P′ passent par trois points B, C, D, les points A′, A″ sont déterminés, ainsi que le milieu J de A′A″; et, par suite, le point E. Mais la parallèle à DE, menée par B, et la droite DJ, donnent le quatrième point commun A. Donc

Deux paraboles ayant trois points communs en ont un quatrième, et ne peuvent avoir plus de quatre points communs.

8. Théorème. — OI, OI′ *étant deux tangentes à une parabole* P; AB, CD *deux cordes quelconques parallèles à ces tangentes, l'axe de l'autre parabole* P′, *circonscrite au quadrilatère* ABCD, *est parallèle à la corde de contact* II′; *le diamètre de* P, *issu de* O, *passe par le centre des moyennes distances de* ABCD.

Le diamètre de P, issu de O, passe par le milieu Q de II′. Les droites OI, OI′, OQ étant respectivement parallèles aux droites DE, DC, DA′ *(fig. 4)*, la conjuguée harmonique de OQ, par rapport à l'angle IOI′, doit être parallèle à DA″ (**), c'est-

(*) Comp. M. Bergmans. *Théorèmes sur la parabole. Mathesis*, 1886, p. 170.

(**) Le faisceau D(ECA′A″) est harmonique, parce qu'on a

$$IA' = IA'' = \sqrt{IC.IE}.$$

à-dire à l'axe de P'; mais cette conjuguée est aussi parallèle à II'.

Les diamètres de P, issus des points I, I', passent respectivement par les milieux M, M' des cordes AB, CD : donc, le diamètre OQ, passant par le milieu de II', passe par le milieu μ de MM'.

Corollaires. — 1° *Les diamètres des deux paraboles circonscrites à un quadrilatère* ABCD, *menés par son centre* μ *des moyennes distances, sont* CONJUGUÉS, c'est-à-dire que l'un passe par les milieux des cordes parallèles à l'autre.

2° *Si deux paraboles invariables se meuvent, chacune dans la direction de son axe, le centre des moyennes distances de leurs quatre points communs reste fixe*, parce qu'alors les diamètres conjugués glissent sur eux-mêmes.

9. Théorème. — *Les axes des deux paraboles circonscrites à un quadrilatère inscriptible* ABCD *sont parallèles aux bissectrices de l'angle compris entre les côtés opposés du quadrilatère, et concourent à son centre des moyennes distances.*

En supposant le quadrilatère ABCD *(fig. 4)* inscriptible, on a

$$\widehat{IDC} = (\widehat{ABC}) = \widehat{DEC},$$

ainsi, ID est tangente au cercle DEC et, par suite,

$$ID = \left(\sqrt{IC.IE}\right) = IA' = IA''.$$

Donc DA', DA'' sont les bissectrices de l'angle $\widehat{EDC}$.

Les diamètres conjugués des paraboles étant perpendiculaires l'un sur l'autre, ce sont leurs axes respectifs.

Inversement, l'angle $\widehat{A'DA''}$ étant droit, on a

$$ID = (IA') = \sqrt{IC.IE},$$

d'où
$$CDI = (\widehat{DEC}) = \widehat{ABC}.$$

Ainsi, *deux paraboles, dont les axes sont perpendiculaires, se coupent aux sommets d'un quadrilatère inscriptible.*

10. Théorème. — *Un quadrilatère* ABCD *étant inscriptible, la distance du centre du cercle circonscrit à l'axe de l'une des deux paraboles circonscrites est égale au demi-paramètre de l'autre* (fig. 6).

Soient M, M′ les projections du centre O sur les côtés AB, CD du quadrilatère : le milieu μ de MM′ est le centre des moyennes distances de ABCD, et les parallèles aux bissectrices de l'angle $\widehat{MOM'}$, issues de μ, sont les axes des paraboles P, P′. Soit N le point où l'axe de P rencontre OM ; Q, R les projections de O, M sur μN. Les segments QR, Nμ ont le milieu commun projection du milieu m de OM (*).

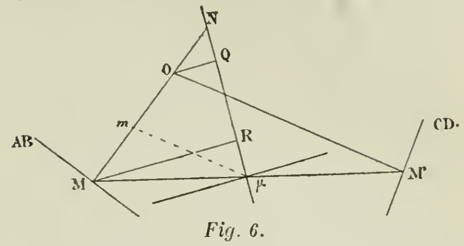


Fig. 6.

Par suite, $$Q\mu = RN.$$

Soit M″ l'extrémité du diamètre de P, passant par M. La corde AB étant parallèle à la tangente en M″, les droites MN, MR sont respectivement parallèles à la normale et à l'ordonnée de M″. Il en résulte que la droite RN est égale à la sous-normale, c'est-à-dire au demi-paramètre de P; mais Qμ, égale à RN, représente la distance de O à l'axe de P′.

Corollaires. — 1° *Si les paraboles* P, P′ *se meuvent, chacune dans la direction de son axe, le centre* O *reste fixe.*

2° *La parabole* P *et le centre* O *restant fixes, la position de* μ (**) *et le paramètre de* P′ *sont invariables.*

RÈGLE DES ANALOGIES DANS LE TRIANGLE

TRANSFORMATION CONTINUE

Par M. **Émile Lemoine.**

(*Suite*, voir p. 62.)

Voici une application intéressante de ces remarques :

M. *Fuhrmann* a publié (voir *Mathesis*, 1890, p. 105 et suivantes) un très important article sur *la Géométrie du triangle*, intitulé : *Sur un nouveau cercle associé à un triangle* et qui

(*) La droite μm étant parallèle à OM′, le triangle μmN est isocèle.
(**) *M. d'Ocagne.* Remarques sur la parabole. *J. S.* 1891, p. 97.

contient un grand nombre de résultats nouveaux. La *transformation continue* montre immédiatement qu'il y a trois autres cercles associés au triangle, qui jouissent de propriétés tout à fait analogues à celles du premier. propriétés déduites de ces dernières par *transformation continue*. On voit qu'il y a entre ces quatre cercles un lien aussi intime que celui qui existe entre les quatre cercles touchant les côtés d'un triangle.

Les propriétés signalées par M. *Fuhrmann* sont immédiatement rendues quatre fois plus nombreuses.

Je ne ferai qu'indiquer ici ces trois nouveaux cercles, mais j'ajouterai que, à propos de chacun d'eux, le Mémoire de M. *Fuhrmann* pourrait se reproduire en entier.

ν est le point de *Nagel* du cercle inscrit o dont les coordonnées normales sont :

$$\frac{p-a}{a}, \qquad \frac{p-b}{b}, \qquad \frac{p-c}{c};$$

ν_a est le point de *Nagel* du cercle ex-inscrit o_a dont les coordonnées normales sont :

$$-\frac{p}{a}, \qquad \frac{p-c}{b}, \qquad \frac{p-b}{c};$$

ν_b, ν_c, etc, H l'orthocentre.

Le cercle de *Fuhrmann* étant le cercle décrit sur $\mathrm{H}\nu$ comme diamètre, les nouveaux cercles, que je signale, sont les trois cercles décrits sur $\mathrm{H}\nu_a$, $\mathrm{H}\nu_b$, $\mathrm{H}\nu_c$ comme diamètres ; on les déduit respectivement du premier par *transformation continue* en A, en B, en C.

On peut observer, en s'occupant de cette question, qu'il y a à diviser les éléments remarquables du triangle en deux catégories :

1° Celle où les éléments se reproduisent par *transformation continue*, par exemple : le barycentre, le centre du cercle inscrit, l'orthocentre, les points de *Brocard*, le point de *Lemoine*, la droite de *Lemoine*, le cercle de *Brocard*, etc. ;

2° Celle où ils donnent d'autres éléments, par exemple : le centre du cercle inscrit, le point de *Nagel*, l'axe antiorthique (droite qui joint les pieds des bissectrices extérieures), le cercle de *Fuhrmann*, etc.

L'équation du cercle de *Fuhrmann* en coordonnées barycentriques est :

$$4Rr.\sum a.\sum \alpha \cos A - \sum a^2\beta\gamma = 0,$$

ou $$2abc\sum \alpha^2 \cos A - \sum \gamma\beta[a^3 + (b-c)^2(b+c)] = 0.$$

Celle du cercle décrit sur $H\nu_a$ comme diamètre sera donc :

$$4Rr_a(\alpha + b + \gamma)(-\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C + \sum a^2\beta\gamma = 0.$$

Le triangle qui a pour sommets : le point de Lemoine K, *le point de* Gergonne λ *du cercle inscrit et le point de* Nagel ν *du cercle inscrit, a pour aire :*

$$\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{2\delta},$$

ainsi que celui qui a pour sommets le centre du cercle inscrit o *et les points* λ *et* ν.

On déduit de là, que :

La droite qui joint le point de Lemoine K *au centre* o *du cercle inscrit et la droite qui joint le point de* Gergonne λ *au point de* Nagel ν *sont parallèles.*

En *transformant continuement* en A, on peut dire que :

L'aire du triangle qui a pour sommets le point de Lemoine K, *le point de* Gergonne λ_a *du cercle ex-inscrit* o_a *et le point de* Nagel ν_a *du même cercle ex-inscrit est égale à*

$$\frac{(b-c)(a+b)(a+c)}{2\delta_a}.$$

L'aire du triangle $o_a\lambda_a\nu_a$, *est égale à la précédente ; en d'autres termes :*

La droite Ko_a *est parallèle à la droite* $\lambda_a\nu_a$. *(A suivre.)*

NOTE D'ALGÈBRE

Par M. **Vautré**, professeur au Séminaire d'Autrey.

Théorème. — *Etant données* n *quantités* $a_1, \ldots a_n$ *et* n *autres quantités* $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, *si* $\Sigma a_1 = 0$ *on a*

(A) $$a_1(\Sigma_1\alpha_1^2 + \Sigma_1\alpha_1\alpha_2) + \ldots + a_n(\Sigma_n a_1^2 + \Sigma_n\alpha_1\alpha_2) = \Sigma\alpha_1[a_1\Sigma_1\alpha_1 + \ldots + a_n\Sigma_n\alpha_1],$$

le signe Σ_k *s'étendant, d'une manière générale, aux* $(n-1)$ *variables distinctes de* a_k.

En effet, la somme Σa_1 étant nulle, il est permis d'ajouter au premier membre de (A) le produit $\Sigma a_1 \Sigma \alpha_1 \alpha_2$, ce qui peut se faire en introduisant dans chacune des parenthèses la somme $\Sigma \alpha_1 \alpha_2$.

La parenthèse de rang k devient ainsi

$$\Sigma_k \alpha_1^2 + 2\Sigma_k \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_k \Sigma_k \alpha_1,$$

ou

$$(\Sigma_k \alpha_1)^2 + \alpha_k \Sigma_k \alpha_1,$$

ou enfin

$$\Sigma \alpha_1 \Sigma_k \alpha_1.$$

En transformant ainsi chacune des parenthèses du premier membre de (A), cette identité se trouve démontrée.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Bernès :

« A propos de la question 409 dont vous avez publié la solution en janvier, on peut observer qu'une solution notablement plus simple résulte de ce que les isocycliques de deux points cherchés sont symétriques relativement à BC. »

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p, 69.)

214. — *Triangles podaires successifs* (*).

Soient $A_0B_0C_0$ le triangle de référence, M un point quelconque; α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, les angles MA_0C_0, MB_0A_0, MC_0B_0, MA_0B_0, MB_0C_0, MC_0A_0, $A_1B_1C_1$ le triangle podaire de M par rapport à $A_0B_0C_0$, $A_2B_2C_2$ le triangle podaire de M par rapport à $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$, le triangle podaire de M par rapport à $A_2B_2C_2$, etc.

(*) A propos des exercices 214, 215, 216, voyez la lettre de M. Bernès (*Journal*, 1891, p. 109). Les résultats signalés ici par M. Boutin nous ont été communiqués, par lui, antérieurement à la lettre citée. Les exercices 206 à 213 sont publiés dans le numéro d'avril du *Journal de Mathématiques spéciales*. G. L.

On vérifie aisément que les triangles podaires successifs ainsi obtenus sont semblables de trois en trois, ainsi $A_mB_mC_m$, $A_{m+3}B_{m+3}C_{m+3}$ sont semblables.

L'angle de B_3C_3 et BC est $90° - (\alpha + \beta + \gamma)$. Si M est un point remarquable de $A_0B_0C_0$, il est également un point remarquable de ses triangles podaires successifs, et la série de ces points se reproduit périodiquement :

Exemple :	Ω,	Ω,	Ω,	Ω,	...
	Ω′,	Ω′,	Ω′,	Ω′,	...
	H,	I,	O,	H,	...
	G,	.,	K,	G,	...
	V,	.,	V_2,	V,	...

La série n'a que trois termes qui reviennent dans le même ordre.

$A_0B_0C_0$ peut-être lui-même considéré comme podaire de M, par rapport au triangle $A_{-1}B_{-1}C_{-1}$, etc.

Le côté a_3 de $A_3B_3C_3$ est donné par la formule :

$$a_3 = a \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = a \sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1.$$

215. — *Le deuxième triangle podaire d'un point* M *est semblable au premier triangle podaire de l'inverse de* M. *Si* M *est un point remarquable* P, *par rapport à son second triangle podaire.* M_2 *est, par rapport à son premier triangle podaire, l'inverse* P_2 *de* P.

216. —

La propriété indiquée plus haut (n° 214) peut être généralisée : soit P un polygone de n côtés, M un point de son plan, les projections de M sur les côtés de P sont les sommets d'un polygone P_1 podaire de M ; les projections de M sur les côtés du polygone P_1 sont les sommets d'un polygone P_2, deuxième podaire de M, etc.

On pourra démontrer que :

P^n, n^{eme} *podaire de* M, *est semblable à* P.

217. — *Quand un point décrit une droite, le milieu de la distance de ses brocardiens décrit une conique circonscrite au triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de* ABC.

Si le même point décrit une conique circonscrite à ABC, *le milieu de la distance de ses brocardiens décrit une droite.*

Soit
$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$
l'équation de la droite décrite par le point $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Le milieu de la distance de ses brocardiens a pour coordonnées

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \ldots$$

d'où
$$\frac{1}{\alpha} = \beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1$$

et l'on a, pour le lieu décrit par $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, l'équation

$$\sum \frac{A}{\beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1} = 0.$$

Inversement, si
$$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\frac{C}{\gamma}=0,$$
représente la droite décrite par le point M; le milieu P de la distance des brocardiens de M décrit la droite dont l'équation est
$$\Sigma\alpha(B+C-A)=0.$$

Applications. — *Si* M *décrit la droite de* Longchamps, *le lieu de* P *est la circonférence des neuf points.*

Si M *décrit la circonférence circonscrite,* P *décrit l'axe orthique.*

Si M *décrit l'hyperbole de* Kiepert, P *décrit la droite* KG.

Si M *décrit l'hyperbole équilatère passant par* K, P *décrit le diamètre de* Brocard, OK.

218. — *Soit* $A_1B_1C_1$ *le triangle pédal de* M, $A_2B_2C_2$ *le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du précédent. Les droites* AA_2, BB_2, CC_2, *concourent en* P, *milieu de la distance des brocardiens de* M.

Si x_1, y_1, z_1, α_1, β_1, γ_1 sont les coordonnées normales et barycentriques de M, on a aisément, pour A_2 :
$$y=\frac{2Sy_1}{ax_1+by_1},\qquad z=\frac{2Sz_1}{ax_1+cz_1};$$
d'où, pour l'équation de AA_2,
$$\frac{y}{z}=\frac{y_1(ax_1+cz_1)}{z_1(ax_1+by_1)},$$
ou
$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\beta_1(\alpha_1+\gamma_1)}{\gamma_1(\alpha_1+\beta_1)},$$
et deux équations analogues pour BB_2, CC_2, ce qui montre que ces droites concourent au point
$$\frac{\alpha}{\alpha_1(\beta_1+\gamma_1)}=\frac{\beta}{\beta_1(\alpha_1+\gamma_1)}=\frac{\gamma}{\gamma_1(\alpha_1+\beta_1)}.$$
Il en résulte que les lieux géométriques de l'exercice 217, s'appliquent aux points M et P du présent exercice.

(A suivre.)

Nota. — Nous publierons dans le prochain numéro la suite de l'article de M. Bénézech *(Note de Géométrie et de Mécanique).*

Erratum. — Page 65, ligne 9; changer le signe des quantités r_a, r_b r_c.

Le Directeur-gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6564-3-92.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès**,

(*Suite*, voir page 73.)

XXII *quater*. — GÉNÉRALISATION. PROPRIÉTÉS DES POINTS COMPLÉMENTAIRES RELATIVEMENT A UN POINT DONNÉ.

1° La transformation des propriétés des points isogonaux en propriétés relatives aux points isoptiques, c'est-à-dire dont les coordonnées angulaires ont des sommes nulles, peut être étendue aux points *complémentaires relativement à un point donné*, c'est-à-dire dont les coordonnées angulaires ont pour sommes les coordonnées angulaires d'un point donné. Le théorème préliminaire à invoquer est celui qui termine le § X, dont le théorème préliminaire relatif aux points isoptiques n'est qu'un cas particulier. Il convient de l'énoncer ainsi :

Théorème préliminaire. — *Lorsque deux points* M, M *sont complémentaires relativement à un point donné* W, *leurs transformés* m, m' *sont isogonaux relativement au triangle* VBC, *dans lequel* V *est l'isocyclique du conjugué de* W.

Voici des exemples de cette transformation.

2° **Théorème.** — v *étant l'isogonal du conjugué d'un point donné* W ; At, At' *des tangentes aux cercles* vAB, vAC ; Ax, Ax' *deux antiparallèles relativement à l'angle* tAt', *et* γ, γ' *deux circonférences passant par* A *et* v *et tangentes, l'une à* Ax, *l'autre à* Ax' : *1° si, sur* γ, *on prend deux points* M, N, *les points* M', N' *qui en sont respectivement les complémentaires relativement à* W *sont sur* γ' ; *2° les circonférences* AMN', ANM' *se coupent sur la circonférence* ABC, *et les circonférences* vMN' vNM' *sur la circonférence* vBC ; *3° chacun des points* M',N' *est défini, sur* γ', *par la relation*

$$\frac{EM.E'M'}{AM.AM'} = \frac{EN.E'N'}{AN.AN'} = \frac{Ev.E'D'}{Av.AD'},$$

où E, E', D *et les signes des rapports sont définis, comme plus haut* (8°), v *remplaçant* H; *4° les intersections* P, Q, R, P', Q', R' *des*

trois circonférences ABC, vAB, vAC, *par trois circonférences respectivement orthogonales menées par* A *et* M′ *et par trois circonférences orthogonales menées par* A *et* M, *sont sur une même circonférence.*

En effet, v a pour transformé V, isocyclique du conjugué de W; les circonférences vAB, vAC ont pour transformées les droites VB, VC; les circonférences γ, γ' ont pour transformées deux droites menées par V et antiparallèles relativement à l'angle BVC; m, n transformés de M, N sont sur l'une; donc m' n' transformés de M′, N′ et isogonaux de m, n relativement à VBC sont sur l'autre, et par suite M′, N′ sont sur γ'. — En outre, de ce que mn' nm' se croisent sur BC, il suit que les circonférences AMN′, ANM′ se rencontrent sur la circonférence ABC, et de ce que les circonférences Vmn', Vnm' se coupent sur la circonférence VBC, il suit que les circonférences vMN′ vNM′ se coupent sur la circonférence vBC. — La relation s'établit comme plus haut (8°). — Et, de même, le théorème sur P, Q, R, P′, Q′, R′ comme 7°.

Le point W sera dit le *point fondamental* ou la *base* du système des points complémentaires. Et le point v, qui est l'isogonal du conjugué de W, sera le *point directeur* du système.

Remarque 1. — Si les coordonnées angulaires de la base W sont λ, μ, ν, celles du point directeur v sont $\lambda - A$, $\mu - B$, $\nu - C$. Les angles de VBC sont $2A - \lambda$, $2B - \mu$, $2C - \nu$. — Quand le système des points complémentaires se réduit à un système de points *isoptiques*, W est à l'infini et v en H. Quand il se réduit à un système de points isogonaux, W est un point arbitraire de la circonférence ABC et v est à l'infini. Et s'il se réduit à un système de points conjugués, W est en o, et v est un point arbitraire de la circonférence ABC.

Remarque 2. — Les circonférences γ, γ' de 2°, qui dans le cas des points isoptiques sont symétriques relativement à Av, le seront aussi toutes les fois que les angles vBA, vCA seront égaux et de signes contraires, ou, ce qui revient au même, lorsque l'isogonal v' de v, et par suite aussi W, est situé sur la perpendiculaire OD au milieu D de BC. Le lieu du point v est alors l'hyperbole équilatère circonscrite au parallélogramme

$ABCA_1$, où A_1 est le symétrique de A relativement à D. Quand on suppose v en A_1, W est en D.

3e Problème. — *Sur deux circonférences données* γ, γ', *définies comme dans* 2°, *déterminer un couple de points complémentaires* M, M′, *tels que la circonférence* AMM′ *ou la circonférence* vMM′ *passe par un point donné* P.

Solution identique à celle du 6° dans le § XXII *ter*.

4° *Lorsque* M *est en* v, *son complémentaire est un point arbitraire du cercle* ABC. *Lorsque* M *est en* A, *son complémentaire est un point arbitraire du cercle* vBC. *Même propriété pour* B *et* C.

Se voit comme dans le 1° du § XXII *ter*.

Propriétés des quatre points ω, ω_a, ω_b, ω_c qui sont leurs propres complémentaires.

5° La moitié de chacune des coordonnées angulaires λ, μ, ν du point W est susceptible de deux déterminations, qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$. Soit $\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ un groupe de déterminations ayant une somme nulle; il y aura trois autres groupes dans le même cas ; savoir :

$$\left(\frac{\lambda}{2},\ \frac{\mu}{2}+\frac{\pi}{2},\ \frac{\nu}{2}+\frac{\pi}{2},\right)\quad \left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{2},\ \frac{\mu}{2},\ \frac{\nu}{2}+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{2},\ \frac{\mu}{2}+\frac{\pi}{2},\ \frac{\nu}{2}\right).$$

Ces quatre groupes définissent quatre points distincts dont chacun est son propre complémentaire. Ces quatre points peuvent s'obtenir comme isocycliques des centres des quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle W_1BC où W_1 est l'isocyclique de W. D'après le théorème préliminaire, ils sont aussi les transformés des centres des quatre cercles tangents aux côtés de VBC. Si I_1 est le centre du cercle inscrit à VBC, et I_V, I_B, I_C les centres des cercles ex-inscrits respectivement situés dans les angles V, B, C du triangle VBC, nous désignons par ω le transformé de I_V, par ω_a celui de I_1, par ω_b celui de I_C, et par ω_c celui de I_B. Les raisons de cette notation seront indiquées plus loin. Les points qui sont leurs propres com-

plémentaires seront donc ω, ω_a, ω_b, ω_c. On peut aussi les appeler les *points doubles* du système W.

Une première propriété très remarquable de ces points, et qui comprend le théorème principal relatif aux points isoptiques est la suivante.

Propriété principale. — M, M' *étant un couple quelconque de points complémentaires relativement à un point donné* W, *le lieu du point harmoniquement opposé à l'un des quatre points doubles* ω, ω_a, ω_b, ω_c *relativement à* MM', *est la circonférence qui passe par les trois autres.*

C'est la transformation évidente du théorème 4° du § XXII *bis*, appliqué au triangle VBC.

Remarquer le cas particulier où l'on prend pour couple de points complémentaires BC, ou CA, ou AB (voir plus loin 12°).

Application aux points isoptiques. — λ, μ, ν sont alors nuls, l'un des quatre points ω est à l'infini, et les trois autres sont H_a, H_b, H_c. Le point harmoniquement opposé à un point à l'infini relativement à MM' est le milieu de MM', et le théorème : *le lieu des centres de tout couple isoptique est le cercle des neuf points*, n'est qu'un cas particulier de la propriété précédente. Mais il ne faut pas oublier que ce cas particulier est à l'origine de la démonstration. Ce théorème sur les points isoptiques se complète par cet autre, non moins général, et qui découle de la même propriété.

Théorème sur les points isoptiques. — *Le lieu du point harmoniquement opposé à l'un quelconque des trois points* H_a, H_b, H_c *relativement à tout couple isoptique est la droite qui joint les deux autres.*

L'application de la même propriété au cas des points isogonaux, reproduit le théorème 4°, sur lequel elle est fondée.

Application aux points conjugués. — Comme alors λ, μ, ν sont égaux à 2A, 2B, 2C, l'un des points ω, par exemple le point $\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$, est un point quelconque de la circonférence ABC, et les trois autres sont A, B, C, c'est-à-dire encore des points de la circonférence ABC. De là ce théorème, facile à vérifier directement :

Théorème sur les points conjugués. — *Le lieu du point harmoniquement opposé à l'un quelconque des points du cercle* ABC, *relativement à la droite* MM′ *qui joint deux points conjugués quelconques est le cercle* ABC.

(*A suivre*).

SUR LES TRANSFORMÉES DES SECTIONS PLANES DU CÔNE DE RÉVOLUTION

Par M. **Rodolphe Guimaraes**, officier du Génie, à Lisbonne.

M. Amiot, dans ses *Leçons nouvelles de Géométrie descriptive* (*), donne, sans démonstration, la formule

$$(1)\quad \rho = \frac{d}{1 - 2\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\sin^2\left(\dfrac{\omega}{2\sin\beta}\right)}, \quad (^{**})$$

pour l'équation polaire de la transformée d'une section plane quelconque, faite dans un *cône de révolution*.

Dans cette expression, d représente la distance SD, α l'angle SCB, β le demi-angle du cône et (ρ, ω) les coordonnées courantes.

M. Amiot dit que cette expression donne les transformées des trois sections coniques. Lorsqu'on suppose $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, hypothèse qui correspond à une section parabolique, on trouve

$$\rho = 0,$$

résultat absurde. Si l'on fait d'ailleurs $\alpha = \pi - 2\beta$, il vient

$$\rho = \frac{d}{\cos^2\left(\dfrac{\omega}{2\sin\beta}\right)};$$

ce qui est faux.

On voit donc que la formule (1) n'est pas exacte. Nous allons

---

(*) Page 160, 1853.

(**) Cette équation, ou plutôt celle-ci :

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos m\omega},$$

est démontrée dans l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie* (1848, cours du lycée Charlemagne, par M. Catalan).

rectifier cette formule en utilisant une proposition indiquée par M. E. Lebon dans son *Traité de Géométrie descriptive* (*).

En effet, si

$$\rho_1 = f(\omega_1)$$

est l'équation (en coordonnées polaires) de la projection horizontale d'une courbe située sur un cône de révolution, à axe vertical,

$$\rho \sin \beta = f\left(\frac{\omega}{\sin \beta}\right)$$

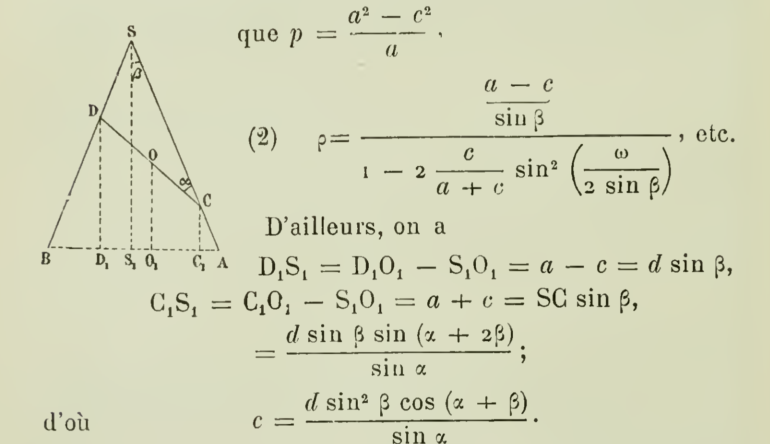
représente la transformée d'une section plane. Si la section est une ellipse, l'équation de la conique (projection horizontale de cette ellipse) est

$$\rho_1 = \frac{p}{1 + e \cos \omega_1}.$$

Par suite, celle de la transformée est

$$\rho \sin \beta = \frac{p}{1 + e \cos \left(\frac{\omega}{\sin \beta}\right)}.$$

Si l'on transforme cette expression, on obtient, en observant



que $p = \frac{a^2 - c^2}{a}$,

$$(2) \qquad \rho = \frac{\frac{a - c}{\sin \beta}}{1 - 2\frac{c}{a + c}\sin^2\left(\frac{\omega}{2 \sin \beta}\right)}, \text{ etc.}$$

D'ailleurs, on a

$$D_1S_1 = D_1O_1 - S_1O_1 = a - c = d \sin \beta,$$

$$C_1S_1 = C_1O_1 - S_1O_1 = a + c = \text{SC} \sin \beta,$$

$$= \frac{d \sin \beta \sin (\alpha + 2\beta)}{\sin \alpha};$$

d'où

$$c = \frac{d \sin^2 \beta \cos (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

En remplaçant dans (2) cette valeur de c, on obtient la formule

(*) Vol. II, page 133.

$$\rho = \frac{d}{1 - 2\dfrac{\cos(\alpha+\beta).\sin\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}\sin^2\left(\dfrac{\omega}{2\sin\beta}\right)} \qquad (3)$$

c'est la formule (1), rectifiée.

Si $\alpha = 0$ ou π, la section est parabolique, et cette expression devient

$$\rho = \frac{d}{\cos^2\left(\dfrac{\omega}{2\sin\beta}\right)}.$$

Si dans (3) on suppose $\alpha = \pi - 2\beta$, on obtient

$$\rho = 0,$$

résultat manifeste, parce que le plan de la section est tangent le long de SB et passe par le sommet S.

RÈGLE DES ANALOGIES DANS LE TRIANGLE

TRANSFORMATION CONTINUE

Par M. **Émile Lemoine.**

(*Suite*, voir p. 91.)

Nous nous sommes aperçu, il y a quelque temps, que le principe de *la transformation continue*, en A, était *implicitement* contenu dans un travail de notre regretté ami *E. Lucas ;* mais l'article, très remarquable (voir *N. C. M.*, 1876, p. 384, et 1877, p. 1 . *Sur l'emploi, dans la géométrie, d'un nouveau principe des signes*), n'a pas attiré suffisamment l'attention des géomètres, parce qu'il était un peu abstrait; qu'il y était question de prendre pour angles d'un triangle les suppléments de ceux qui sont généralement adoptés; de considérer chaque triangle comme formé de quatre triangles distincts : un triangle fermé et trois ouverts, et enfin, parce que les considérations aussi générales sur les signes sont presque toujours un peu difficiles à suivre, même pour les géomètres aussi habiles que Lucas, qui, par divers travaux. a élucidé des questions délicates sur ces sujets (signes en général dans les directions du plan et de l'espace, etc.). La question est certainement délicate, dis-je, car, dans le cas qui nous occupe, la transformation qui résulterait des définitions de *Lucas* reviendrait à changer, dans une formule du triangle, A, B, C en A, $B - \pi$, $C - \pi$; or, si cette

transformation ne montre pas son inexactitude au premier abord, parce qu'elle donne des résultats vrais dans beaucoup de formules, il est facile de voir, en l'appliquant à des cas particuliers, qu'elle n'est pas permise; il suffira d'en citer un exemple que m'a indiqué M. *Poulain*.

Dans tout triangle, on a :

$$\sum \sin A = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

et

$$\sum \cos A = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1.$$

Si l'on y remplace A, B, C respectivement par $A, \pi - B, \pi - C$, on a un résultat inexact.

L'importance du travail de *Lucas* n'a certainement pas échappé à M. *Neuberg*; car, sans entrer dans le fond de la question, ce géomètre s'en est occupé (*Mathesis*, 1883, p. 167) à propos de formules exprimant l'aire d'un triangle, formules énoncées par M. *Main*, et a précisé davantage.

De même que par *la transformation continue*, les points remarquables du plan du triangle se divisent en points invariables et en points groupés par quatre, les formules et les théorèmes peuvent se divisr de pareille façon; ainsi ce théorème :

Le cercle qui passe par les milieux des côtés, passe par les points des hauteurs, ne donne rien par *transformation continue*, tandis que celui-ci :

Les pieds des trois bissectrices extérieures d'un triangle sont en ligne droite, donne trois autres théorèmes, résumés par l'énoncé : *Les pieds de deux bissectrices intérieures et celui de la bissectrice extérieure, correspondant au troisième sommet sont en ligne droite*.

La formule
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c},$$
ne donne rien de nouveau.

La formule $ar_a + br_b + cr_c = 2p(2R - r)$, donne la formule $ar + br_c + cr_b = 2(p-a)(2R + r_a)$; et deux autres, analogues à celle-ci.

La distance d du centre du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit étant donnée par

$$d^2 = R(2R - r);$$

celle d_a du centre du cercle ex-inscrit o_a au centre du cercle circonscrit sera donnée par

$$d_a^2 = R(2R + r_a), \text{ etc., etc.}$$

On aperçoit facilement la fécondité de la méthode; nous remarquons qu'elle trouve à s'appliquer dans presque tous les numéros de ce journal, pour multiplier les formules ou les théorèmes donnés par les auteurs. Ainsi dans le *J. E.* à la page 40, les trois identités considérées dans la question 377 donnent *chacune* trois autres identités, et les formules qui se trouvent dans le développement de la Note sont susceptibles d'en donner d'autres par *transformation continue*, comme on le verra dans l'article, cité plus haut, qui paraît (*) dans le journal *Mathesis*, article où ces formules se trouvent pour la plupart.

La Question 400 de M. *G. de Longchamps* (Voyez *Journal*, p. 45) : *Démontrer que :*

$$\frac{1}{2}\sum a^2(b-c)^2(ab+ac-2bc)^2,$$

est un carré parfait, se transforme en celle-ci : *Démontrer que :*

$$\frac{1}{2}[a^2(b-c)^2(ab+ac+2bc)^2 + b^2(c+a)^2(bc-ba+2bc)^2 + c^2(b+a)^2(bc-ac+2ab)^2],$$

est un carré parfait et en deux autres.

La démonstration de M. *Sollertinsky* montrant que le carré considéré dans la formule qu'il veut établir est :

$$\frac{1}{4}[a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)]^2,$$

la *transformation continue* donne, pour la seconde,

$$\frac{1}{4}[a^2(b-c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(b+a)^2]^2, \quad \text{etc. (**)}$$

Ces formules dérivées, de la Question 400, sont, du reste, évidentes, sans que l'on emploie la *transformation continue;* car l'identité s'applique à toutes les valeurs de a, b, c, quantités quelconques. Mais il n'en est pas de même pour celles qui

(*) Voyez *loc. cit.* numéro de mars.

(**) On trouve aussi, comme l'a observé M. *Boutin* dans la solution qu'il nous a adressée, que l'expression proposée est le carré parfait de

$$\sum ac(a-b)(a-c).$$

G. L.

sont dérivées de la Question 377, car elles contiennent, avec les côtés a, b, c, d'autres éléments du triangle.

D'une façon générale, on peut dire que l'on établit, sans recherches, par la *transformation continue*, des formules dissymétriques qu'il eût été difficile de prévoir et qu'on eut eu quelque peine à démontrer autrement. Nous nous sommes occupé au Congrès de Lyon, de l'Association française en 1873, d'un point Θ_1, tel que, si, par ce point, on mène des parallèles aux trois côtés de ABC ces lignes déterminent par leurs intersections avec les côtés un hexagone circonscrit au cercle inscrit du triangle ABC; ce point apparaît assez souvent dans la Géométrie du triangle; il a pour coordonnées normales

$$\frac{2a-p}{a}, \frac{2b-p}{b}, \frac{2c-p}{c}, \quad \text{ou} \quad \frac{r_a r_b + r_a r_c - r_b r_c}{a}, \quad \text{etc.}$$

Il nous a fallu des tâtonnements et quelques calculs assez longs pour trouver les points Θ_{1a}, Θ_{1b}, Θ_{1c} qui jouissent, par rapport respectivement aux cercles ex-inscrits o_a, o_b, o_c, de la même propriété que le point Θ_1, par rapport au cercle inscrit, La *transformation continue* les donne immédiatement.

Θ_{1a} a pour coordonnées normales

$$-\frac{3a+b+c}{a}, \frac{a+3b-c}{b}, \frac{a-b+3c}{c},$$

$$\text{ou} \quad \frac{r(r_b+r_c)+r_b r_c}{a}, \frac{r(r_c-r_b)-r_b r_c}{b}, \frac{r(r_b-r_c)-r_b r_c}{c},$$

etc., etc.

Le principe sur lequel nous nous sommes appuyé pour démontrer la légitimité de la *transformation continue* peut servir à trouver une *infinité* d'autres transformations; ainsi, si l'on remplace dans $F(A, B, C) = o$, A, B, C respectivement par $A - \pi$, $B + \pi$, C; cela correspondra à une transformation où

a, b, c, p, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$, R, S, r, r_a, r_b, r_c, etc.,

devront être remplacés respectivement :

a, b, $-c$, $(p-c)$, $-(p-b)$, $-(p-a)$, p, $-$R, S, r_a, r_b, r_a, r, etc.,

mais nousn'en avons pas trouvé qui ait l'importance de la *transformation continue*. Nous montrerons ultérieurement que la transformationcontinue s'applique au tétraèdre.

NOTE DE GEOMÉTRIE ET DE MÉCANIQUE

Par M. **Louis Bénézech.**

(*Suite*, voir p. 58.)

Applications. — **Théorème VIII.** — La somme des distances algébriques d'un point quelconque du plan d'un polygone régulier, aux droites qui joignent le centre aux sommets, est nulle.

Ce théorème résulte du corollaire du théorème II et de la formule (5).

Théorème IX. — Les distances algébriques x_1, x_2, x_3 d'un point quelconque du plan d'un triangle ABC, aux droites qui joignent le centre O du cercle circonscrit aux sommets, vérifient la relation $x_1 . \sin 2A + x_2 . \sin 2B + x_3 . \sin 2C = 0$.

Car les segments : OA. sin 2A, OB. sin 2B, OC. sin 2C se font équilibre.

Théorème X. — Les distances algébriques x_1, x_2, x_3 d'un point quelconque du plan d'un triangle ABC, aux droites qui joignent le centre de gravité aux sommets, vérifient la relation $m_a x_1 + m_b x_2 + m_c x_3 = 0$, m_a, m_b, m_c désignant les longueurs des médianes.

Théorème XI. — Les distances algébriques x_1, x_2, x_3 d'un point quelconque du plan d'un triangle ABC, aux droites qui joignent le point de Lemoine aux sommets, vérifient la relation $am_a x_1 + m_b x_2 + cm_c x_3 = 0$.

Théorème XII. — Étant donné un polygone régulier $A_1A_2 \ldots A_n$, le lieu géométrique des points tels que leurs distances algébriques aux droites qui joignent le centre O du polygone, aux sommets $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$, vérifient la relation du premier degré

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} = K,$$

est une parallèle à OA_n menée à la distance $x_n = -K$.

IV. **Théorème XIII.** — Lorsqu'une sphère quelconque passant par un point M coupe n segments de droites MA_1, $MA_2 \ldots MA_n$ et leur résultante géométrique MR en des

points A'_1, $A'_2 \dots A'_n$, R', on a la relation

$$\sum MA_1.MA'_1 = MR.MR'.$$

En effet, écrivons que la projection de la résultante, sur le diamètre du point M, est égale à la somme des projections des composantes, il vient

$$\sum \underline{MA_1} = \underline{MR};$$

ou bien, en observant que, d'une manière générale,

$\underline{MA_k} = MA_k.\frac{MA'_k}{2\rho}$ (ρ désignant le rayon de la sphère considérée) :

$$\sum MA_1.MA'_1 = MR.MR';$$

Remarque. — Si les segments considérés se font équilibre, on a :

$$\sum MA_1.MA'_1 = 0.$$

Corollaire. — Lorsqu'un plan rencontre n segments de droites $MA_1, MA_2 \dots MA_n$ et leur résultante géométrique MR, en des points A''_1, $A''_2 \dots A''_n$, R'', on a :

$$\sum \frac{MA_1}{MA''_1} = \frac{MR}{MR''}.$$

Car, si $A'_1, A'_2 \dots A'_n$, R' sont les points où la sphère, transformée par inversion du plan par rapport au pôle P et avec la puissance μ, coupe respectivement $MA_1, MA_2, \dots MA_n$, MR, on a, d'après le théorème précédent

$$\sum MA_1.MA'_1 = MR.MR';$$

d'où, à cause des égalités

$$MA'_1.MA''_1 = \dots = MA'_n.MA''_n = MR'.MR'' = \mu :$$

$$\sum \frac{MA_1}{MA''_1} = \frac{MR}{MR''}.$$

Remarque. — Si les segments considérés se font équilibre, la relation devient

$$\sum \frac{MA_1}{MA''_1} = 0.$$

Applications. — **Théorème XIV.** — Lorsqu'une sphère quelconque, passant par un point M, coupe n segments de

droites $MA_1, \ldots MA_n$ en des points $A'_1, \ldots A'_n$, on a la relation

$$\sum \alpha_1 MA_1 . MA'_1 = \left(\sum \alpha_1\right) MO.MO',$$

O étant le centre des distances proportionnnelles du système $(A_1, \alpha_1) \ldots (A_n, \alpha_n)$, et O' le point où MO perce la sphère.

Car $\left(\sum \alpha_1\right)$MO est la résultante des segments

$$\alpha_1 MA_1 \ \ldots . \ \alpha_n . MA_n.$$

Corollaire. — Étant donnés cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, M sur une sphère, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ désignent les coordonnées barycentriques absolues d'un point O, par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, on a :

$$\alpha_1 . \overline{MA_1}^2 + \alpha_2 . \overline{MA_2}^2 + \alpha_3 . \overline{MA_3}^2 + \alpha_4 . \overline{MA_4}^2 = V . MO . MO';$$

O' désignant le point où MO perce la sphère.

Remarque. — Lorsque le point O est également sur la sphère, cette formule devient

$$\sum \alpha_1 . \overline{MA_1}^2 = V . \overline{MO}^2 \quad (*).$$

Si, dans cette hypothèse, on suppose de plus que le point M coïncide successivement avec A_1 et O, on obtient les deux relations :

$$\alpha_2 . d_{12} + \alpha_3 . d_{13} . + \alpha_4 d_{14} = V . \overline{A_1O}^2,$$

$$\sum \alpha_1 . \overline{OA_1}^2 = 0.$$

Théorème XV. — Lorsqu'un plan quelconque rencontre

(*) Cette égalité a lieu, même si le point M n'est pas situé sur la sphère. En effet, d'après une formule fondamentale, on a

$$\Sigma \alpha_1 . \overline{MA_1}^2 = \Sigma \alpha_1 . \overline{OA_1}^2 + V . \overline{MO}^2.$$

Or, O étant sur la sphère

$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 d_{12} = V \Sigma \alpha_1 . \overline{OA_1}^2 = 0,$$

on a donc bien $\quad \Sigma \alpha_1 . \overline{MA_1}^2 = V . \overline{MO}^2.$

Cette relation peut être considérée comme une généralisation de ce théorème de M. Luchterhant (*Journal de Crelle*, t. XXIII) : Dans tout quadrilatère inscriptible, si on multiplie l'aire du triangle formé par trois des sommets, par le carré de la distance du quatrième sommet à un point quelconque du plan, la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par une diagonale, est égale à la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par l'autre diagonale.

n segments de droites MA_1, MA_2 ... MA_n en des points A'_1, A'_2, ... A'_n, on a la relation :

$$\frac{\alpha_1 . MA_1}{MA'_1} + \frac{\alpha_2 . MA_2}{MA'_2} + \ldots + \frac{\alpha_n . MA_n}{MA'_n} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)MO}{MO'}.$$

O étant le centre des distances proportionnelles du système (A_1, α_1) ... (A_n, α_n), et O′ le point où MO perce le plan.

(A suivre.)

TRANSFORMATION DES FORMULES DES TRIANGLES

Par M. **A. Poulain**, à Angers.

1. — M. Lemoine a indiqué récemment une méthode très simple pour déduire, les unes des autres, un grand nombre de formules des triangles (*Congrès de Marseille*, 1891; *Mathesis*, mars 1892; *J. E.*, p. 62). Il l'a appelée la *transformation continue*. Elle s'appuie sur cette proposition que toute relation générale subsiste si l'on remplace A, B, C par $-A$, $\pi - B$, $\pi - C$ et a, b, c par a, $-b$, $-c$. Les éléments secondaires, tels que R, S, h_a, r, r_a, r_b, r_c, deviennent $-R$, $-S$, $-h_a$, r_a, r, $-r_c$, $-r_b$. On le prouve, en les regardant comme définis au moyen des éléments fondamentaux par les formules

$$2R = \frac{a}{\sin A}, \quad S = \frac{ab \sin C}{2}, \quad r = \frac{S}{p}, \quad r_a = \frac{S}{p-a} \quad \ldots$$

De même p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ deviennent $-(p-a)$, $-p$, $p-c$, $p-b$.

2. — L'Auteur s'appuie sur un théorème plus général qu'il admet comme suffisamment évident et que je me propose de démontrer, tout en y introduisant une restriction nécessaire (*).

Théorème fondamental. — *Etant donnée une relation* algébrique et rationnelle *entre les côtés* a, b, c *d'un triangle quelconque et les lignes trigonométriques des angles* A, B, C *ou de leurs multiples algébriques, la relation reste exacte si l'on y remplace les angles* A, B, C *par d'autres* A′, B′, C′, *même négatifs*,

dont la somme soit encore égale à π, et a, b, c *par des quantités proportionnelles aux sinus des nouveaux angles.*

Pour faciliter mon exposition, je dirai, à titre au moins provisoire, que la nouvelle relation est *connexe* de l'ancienne par rapport à A′, B′. C′ et au côté a.

Démonstration. — On peut d'abord amener la relation à ne plus contenir que des angles A, B, C. Car, puisqu'elle est homogène par rapport aux longueurs, on peut remplacer a, b, c par les sinus qui leur sont proportionnels.

On peut ensuite éliminer les tangentes et cotangentes et ne conserver que des sinus et cosinus. Soit

(1) $$f(A, B, C) = 0$$

la relation ainsi transformée. Remplaçons A par sa valeur $\pi - B - C$.

Nous avons alors

(2) $$f(\pi - B - C, B, C) = 0.$$

Cette égalité est vraie, par hypothèse, pour toutes les valeurs de B et C qui sont positives et telles qu'on ait $B + C < \pi$. Je dis qu'elle subsiste, sans aucune restriction imposée à B et C. En effet posons

$$\cos B + i \sin B = \mu.$$

De cette égalité, nous en tirons successivement

$$\cos mB + i \sin mB = (\cos B + i \sin B)^m = \mu^m$$

$$\cos mB - i \sin mB = \mu^{-m}$$

(3) $$2i \sin mB = \mu^m - \mu^{-m}, \qquad 2 \cos mB = \mu^m + \mu^{-m}.$$

On exprimerait de même $\sin mC$, $\cos mC$ en fonction d'une quantité ν.

La relation (2) ne contient que des quantités de la forme $\sin mB$, $\sin m'B$, ... Or, si on les remplace par les valeurs (3), on a finalement, dans le premier membre, un polynôme en μ et ν, d'un nombre fini de termes, où les exposants des variables sont positifs ou négatifs, et entiers, fractionnaires ou incom-

(*) Il faut, en général, que la relation soit rationnelle. Ainsi la formule $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ ne donne pas un résultat exact par la transformation de M. Lemoine, puisque les deux membres deviennent de signes contraires. Il ne s'agit aussi (4) que des relations concernant les triangles quelconques.

mensurables. Par hypothèse, ce polynôme s'annule pour une infinité de valeurs des variables comprises entre certaines limites. On sait qu'alors il s'annule pour toute valeur indistinctement.

Mais si l'égalité (2) est vraie, sans restriction, il en est de même de (1), qui en diffère seulement par la substitution, dans certains termes, de $\pi - B - C$ par une quantité égale A (*).

3. — Si la somme $A' + B' + C'$ était égale, non plus à π, mais à $-\pi$, 3π, etc., le théorème ne subsisterait plus. On le voit sur un exemple. La formule

$$\Sigma \sin A = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

donne un signe inexact si l'on remplace A par $A \mp 2\pi$.

4. — J'ai supposé que la relation $f(A, B, C) = 0$ appartenait à un triangle quelconque. Si, au contraire, elle suppose une relation particulière entre les angles, par exemple, $B + C = \frac{\pi}{2}$, il faut modifier l'énoncé et *admettre seulement les transformations qui ne changent pas cette relation particulière.* Ainsi, dans la formule des triangles rectangles, $b = c \operatorname{tg} B$, la transformation de M. Lemoine donnerait un signe faux; mais on peut remplacer B, C par $B + \pi$, $C - \pi$. Et, en effet, le raisonnement ci-dessus suppose que B et C varient indépendamment l'un de l'autre, et que, dès lors, on n'a pas $B + C = \frac{\pi}{2}$. Si le contraire a lieu, la relation (2) est amenée, par l'élimi-

(*) Il semble, au premier abord, qu'on puisse donner un raisonnement plus élémentaire, en disant : lorsque les angles A, B, C, appartiennent à un triangle, la relation $f(A, B, C) = 0$ est la conséquence de $A = \pi - B - C$. Car on peut remplacer A par cette valeur et si on ne trouvait pas alors une identité, on pourrait calculer l'angle B du triangle en connaissant seulement C. Mais cette substitution amènera encore une identité, si on opère sur les angles A', B', C', car *on a la même suite de calculs.* Par suite, la relation $f(A'\ B', C') = 0$ est exacte, puisqu'elle se déduit de l'identité en remplaçant $\pi - B' - C'$ par la quantité égale A'.

Ce raisonnement prouve trop, puisqu'il s'applique même aux relations irrationnelles. On y admet qu'*on aura la même suite de calculs dans les deux cas*, ce qui n'est pas prouvé. Ces calculs supposent certaines inégalités relatives à A, B, C. La preuve qu'elles influent parfois, c'est que le théorème exige des restrictions.

nation de C, à ne contenir qu'une variable B. On montre qu'elle subsiste pour toute valeur de B, sans exception; ce qui mène au nouvel énoncé.

5. — Voici la liste de quelques valeurs simples qu'on peut donner à A′, B′, C′. Ces transformations peuvent se répéter plusieurs fois de suite :

1° $-A, \pi-B, \pi-C$; $\pi-A, \frac{\pi}{2}-B, \frac{\pi}{2}-C$; $\frac{2\pi}{3}-A, \frac{2\pi}{3}-B, \frac{2\pi}{3}-C$;

$$A, B+m, C-m; \quad A+m, B-\frac{m}{2}, C-\frac{m}{2};$$

2° $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}, \frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}, \frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$; $\frac{A}{2}-\frac{\pi}{2}, \frac{B}{2}+\frac{\pi}{2}, \frac{C}{2}+\frac{\pi}{2}$;

$$nA+(1-n)\pi, nB, nC \qquad (n \neq 0);$$

3° $\pi-2A, \pi-2B, \pi-2C$ (ou $B+C-A,\ldots$);

$$m(B-C)+\pi, m(C-A), m(A-B);$$

$$m(B-C), m(C-A)+\frac{\pi}{2}, m(A-B)+\frac{\pi}{2}.$$

Lorsque les trois valeurs ne sont pas symétriques en A, B, C, on a parfois des résultats différents en permutant A et B avant de faire la transformation par rapport à a. On peut donc dire que le tableau précédent renferme une vingtaine de transformations très simples. On peut les appliquer aux formules qui donnent $\sum \sin A$, $\sum \cos A$, $\sum \sin^2 A, \ldots$

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS (*)

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 94.)

224. — *Soit un triangle* ABC. *En* A *on élève* AB′ *perpendiculaire à* AC *et coupant* BC *en* B′; AC′ *perpendiculaire à* AB *et coupant* BC *en* C′. *Soit* R_a *le rayon du cercle* AB′C′, R_b, R_c *les rayons de cercles analogues. On a*

$$\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}=\frac{1}{R}.$$

(*) Les exercices 219-223 sont publiés dans le numéro de ce mois du Journal de *M. S.*

On trouve aisément

$$R_a = R \cdot \text{tg}\, B \cdot \text{tg}\, C.$$

225. — *Dans l'exercice précédent, soit* A_1 *le milieu de* B'C'; *soient* B_1, C_1, *les points analogues. Les droites* AA_1, BB_1, CC_1, *concourent en un même point qui est l'anticomplémentaire de l'orthocentre de* ABC.

$$BA_1 = \frac{B'C'}{2} - BB' = R \cos A \,\text{tg}\, \varphi - 2R \,\text{tg}\, C \cos A$$
$$= R \cos A (\text{tg}\, A + \text{tg}\, B - \text{tg}\, C),$$
$$CA_1 = R \cos A (\text{tg}\, A + \text{tg}\, C - \text{tg}\, B),$$
$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\text{tg}\, A + \text{tg}\, B - \text{tg}\, C}{\text{tg}\, A + \text{tg}\, C - \text{tg}\, B}.$$

A_1 est donc le pied de la droite qui joint A à l'anticomplémentaire de H.

226. — *Les centres* O_a, O_b, O_c *des cercles de rayons* R_a, R_b, R_c *considérés à l'exercice* 224, *sont les points algébriquement adjoints au centre* O *du cercle circonscrit à* ABC.

Calculons les coordonnées normales x, y, z de O_a.

Pour cela, observons que O_a est le barycentre des points A, B', C', affectés des masses : — sin 2A, sin 2C, sin 2B. On a d'ailleurs :

$$AB' = b \,\text{tg}\, C \qquad AC' = c \,\text{tg}\, B,$$

$$\frac{x}{-h \sin 2A} = \frac{y}{b \sin 2C \,\text{tg}\, C - c \sin 2B \,\text{tg}\, B \cos A}$$
$$= \frac{z}{c \sin 2B \,\text{tg}\, B - b \sin 2C \,\text{tg}\, C \cos A};$$

ou, toutes réductions faites :

$$\frac{x}{-\cos A} = \frac{y}{\cos B} = \frac{z}{\cos C}.$$

Il en résulte que les droites AO_a, BO_b, CO_c concourent en O, et que les cercles O_a, O_b, O_c sont tangents, en A, B, C, au cercle circonscrit.

227. — *Aire du triangle* $O_aO_bO_c$.

$$2O_aO_bO_c = \sum (R_a - R)(R_b - R) \sin 2C = R^2 \,\text{tg}\, A \,\text{tg}\, B \,\text{tg}\, C.$$

Ce triangle est équivalent au triangle formé par les tangentes en A, B, C, au cercle circonscrit.

228. — *Lieu géométrique du point d'intersection de deux transversales réciproques rectangulaires.*

Soient

$$(1) \qquad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0, \qquad \frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} = 0.$$

les équations de ces droites. La condition de perpendicularité est :

$$(2) \qquad \sum a^2 - \sum bc \cos A \left(\frac{\beta_1}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1}{\beta_1}\right) = 0.$$

De (1), on tire, en éliminant α_1

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1}+\frac{\gamma_1}{\beta_1}=\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{\beta\gamma},$$

d'où, pour l'équation du lieu :

$$\sum a^2-\sum bc\cos A\left(\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{\beta\gamma}\right)=0,$$

ou $$2\alpha\beta\gamma\sum\cot A+\sum\alpha\cot A(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)=0,$$

qui se décompose en : $$\alpha+\beta+\gamma=0,$$

$$\sum\alpha\cot A(\beta+\gamma-\alpha)=0,$$

droite de l'infini et cercle des neuf points. Il en résulte que deux transversales réciproques rectangulaires sont deux droites de Simson.

CORRESPONDANCE

M. d'Ocagne nous a adressé la lettre suivante :

« Permettez-moi de vous faire observer que le théorème qui sert de point de départ à l'intéressante Note de M. Sollertinsky sur la parabole, insérée dans le dernier numéro du *J. M. E.* (p. 83), a déjà été énoncé dans le *J. M. S*, où je l'ai proposé comme question (1887, p. 144, quest. 225). Deux démonstrations en ont paru dans le même journal (1890, p. 252, 253). Celle de M. Sollertinsky est, peut-être, plus élémentaire. »

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(SESSIONS DE JUILLET ET D'OCTOBRE 1891, PARIS)

7 juillet. — 1° Diviser une droite en moyenne et extrême raison.

2° Construire et calculer le rayon du décagone régulier inscrit dans une circonférence de rayon R.

3° Un corps pesant est lancé d'une hauteur h au-dessus du sol, avec une vitesse V_0 dirigée verticalement de bas en haut. Quelle vitesse aura-t-il en tombant sur le sol?

8 juillet. — 1° Un triangle rectangle isoscèle ABC dans lequel $AB=AC=b$ tourne autour de son axe Bx situé dans son plan, passant par le sommet B et ne traversant pas la surface du triangle. Calculer le volume engendré par ce triangle, en fonction de l'angle α que fait l'hypoténuse BC

avec l'axe Bx. Déterminer α de façon à rendre ce volume maximum.
2° Définition et propriétés de la sous-normale à une parabole.

10 juillet. — 1° On donne, dans un triangle ABC la base BC $= a$ et la hauteur h du sommet A ; on mène la droite B′C′, parallèle à BC, à la distance x de BC; on joint B′ et C′ à un point A′ de BC. On demande de calculer le volume V engendré par le triangle A′B′C′. Maximum de V.
2° Une tige, de hauteur h, est dirigée suivant la verticale d'un lieu dont la latitude est φ, et exposée aux rayons du soleil. On demande de trouver les longueurs l et l' de l'ombre portée par la tige à midi vrai aux jours des solstices d'hiver et d'été. On suppose connue l'obliquité de l'écliptique ω.

16 juillet. — 1° Étant donnés deux points A et B, étudier la variation de l'angle AMB sous lequel on voit, d'un point M, le segment AB quand ce point M se déplace sur une droite DD′ donnée et, perpendiculaire à AB. On donne AC $= a$, BC $= b$; on prendra MC $= x$ comme variable.
2° Étant donnée une droite par ses projections, construire l'angle qu'elle fait avec la ligne de terre.

20 juillet. — 1° Formule des annuités.
2° Étant donné un carré ABCD, trouver, sur le côté CD, ou sur son prolongement, deux points E et F tels que le segment EF soit vu du point A sous un angle droit, et, du point B, sous un angle α. Entre quelles limites peut varier l'angle α?

23 juillet. — 1° Couper une sphère par un plan P, de telle façon que le volume de l'un des segments à une base ainsi obtenus soit au volume du cylindre ayant même base et même hauteur que le segment, dans un rapport donné m. On prendra comme inconnue la hauteur du segment.
2° Jour solaire moyen. — Sa définition.

22 octobre. — Enoncer et démontrer le théorème qui fait connaître le volume du tronc de pyramide triangulaire.

(2) On donne $\sin a = b$; trouver $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

26 octobre. — On donne un cercle O de rayon AO $=$ R et un point M situé sur le prolongement de OA à une distance AM $= h$. On mène du point M la tangente MT au cercle. On demande de calculer en mètres la longueur x de la perpendiculaire abaissée du point de contact T sur OM.

$$h = 300 \text{ mètres},$$
$$R = 6366000 \text{ mètres}.$$

(8) Vitesse; sa définition dans le mouvement rectiligne le plus général. La loi des espaces étant donnée par la formule $e = t^3 + pt + q$, où p et q désignent deux constantes et t le temps, trouver la vitesse à un instant donné quelconque.

29 octobre. — Etant donné un cercle de rayon R et un diamètre DOA de ce cercle, déterminer sur ce diamètre prolongé un point B par la condition que la surface engendrée par la tangente BE, menée du point B au cercle tournant autour du diamètre AOD, et la surface de la zone engendrée par l'arc DE tournant autour du même diamètre aient une somme égale à m fois la surface de la sphère de rayon R. — On prendra comme inconnue la longueur OB.
(12). — Mouvement uniformément varié. Loi des espaces; loi des vitesses : déduire la première loi de la seconde.

3 novembre. — On donne une parabole de sommet A et de foyer B et la longueur $AB = \frac{p}{2}$. On demande de calculer les longueurs h, h' h'' de trois ordonnées BM, B'M', B''M'' perpendiculaires à l'axe AB et telles que les droites MB', M'B'' soient respectivement normales à la parabole aux points M et M'. Démontrer la relation

$$h'^2 = \frac{h^2 + h''^2}{2}.$$

(16) Démontrer que le centre de gravité de quatre poids égaux placés aux sommets d'un tétraèdre coïncide avec le centre de gravité du volume du tétraèdre.

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Géométrie, à l'usage des mathématiques élémentaires, avec les compléments à l'usage des mathématiques spéciales, par M. Ch. Vacquant, ancien élève de l'Ecole normale, ancien professeur de Mathématiques speciales au lycée Saint-Louis, inspecteur général de l'instruction publique. — Quatrième édition, conforme aux programmes du 24 janvier 1891. 1 vol. in-8° broché. 8 fr.

Pour mettre la présente édition en harmonie avec les programmes de la classe de Mathématiques élémentaires du 24 janvier 1891, il a fallu faire au texte des éditions précédentes, des additions et certaines modifications.

Les additions sont les suivantes :

Livre I. — Figures symétriques par rapport à un point ou par rapport à une droite. — Deux figures symétriques sont égales; mais tandis que la disposition des élements dans l'une des figures est *la même* que la disposition des éléments correspondants dans l'autre, si les figures sont symétriques par rapport à un point, elle lui est inverse si les figures sont symétriques par rapport à une droite.

Livre II. — Déplacement d'une figure plane, de forme invariable, dans le plan de cette figure. — Translation, rotation. — Tout deplacement d'une figure plane dans son plan peut être produit par une rotation ou par une translation.

Livre III. — Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Axe radical de deux cercles. — Centre radical de trois cercles. (Dans les éditions précédentes, ces questions n'étaient traitées que dans le complement.)

Livre VII. — Déplacement dans l'espace d'une figure de forme invariable. — Translation, rotation autour d'un axe. — Déplacement sur une sphère d'une figure tracée sur cette sphère. — Tout deplacement dans l'espace d'une figure de forme invariable peut être produit par une translation et une rotation autour d'un axe.

Livre VIII. — Quelques théorèmes complémentaires sur l'hélice. — Déplacement hélicoïdal d'une figure de forme invariable.

La modification la plus importante concerne la theorie des figures semblables. Conformément aux indications du nouveau programme, sauf pour les triangles, l'étude des figures semblables, dans un plan et dans l'espace, est précédée de l'étude des *figures homothétiques* et repose sur cette étude.

Mouchot (A), ancien professeur de l'Université, lauréat de l'Académie des sciences. — **Les nouvelles bases de la Géométrie supérieure. (Géométrie de position)**. In-8°, avec figures, 1892; 5 fr. (Librairie Gauthier-Villars.)

Un peu de philosophie naturaliste, par M. H. Mathieu. (1 vol. in-18, 2 fr. 50. F. Alcan, éditeur.)

Vient de paraître **l'Année philosophique**, publiée sous la direction de F. Pillon (2e année, 1891). (Librairie F. Alcan.)

QUESTION 403

Solution par M. Grolleau, maître répétiteur au Lycée de Marseille.

Si l'on projette un foyer F *d'une conique sur la tangente et sur la normale en un point* P *de la courbe, et, ce dernier point sur l'axe focal en* C *:*

1° Les deux premières projections A, B *seront en ligne droite avec le centre* O*;*

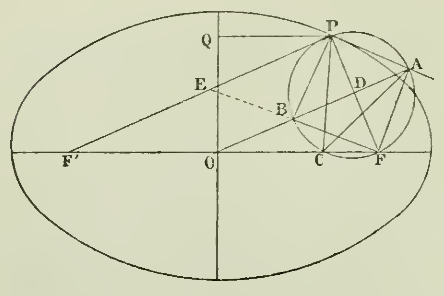
2° Du point C, AB *sera vue sous un angle droit;*

3° Dans l'angle formé avec l'axe par la droite qu'elles déterminent, la normale et la droite joignant la deuxième projection à la troisième sont antiparallèles;

4° Les distances du centre, à ces deux dernières projections, sont entre elles dans un rapport égal à l'excentricité; d'où résulte, sans calcul, le rapport connu de la différence ou de la somme des rayons vecteurs d'un point d'une conique avec la distance de ce point au second axe. (A. Tissot.)

Soit F′ son second foyer.

1° Raisonnons dans le cas de l'ellipse. La droite AB coupe PF en un point D, milieu de PF ; car la figure PAFB est un rectangle. Si nous prolongeons FB jusqu'à sa rencontre, en E, avec PP′, nous voyons que FB = BE; il en résulte que BD ou BA, qui joint les milieux des côtés FP, FE du triangle FPE, est parallèle à PE.



Si nous prolongeons AB, comme elle passe par le milieu B de EF et qu'elle est parallèle au côté F'E, cette droite passera par le milieu O du troisième côté FF'. Donc les trois points A, B, O sont en ligne droite.

2° La circonférence décrite sur AB comme diamètre, passe en C; l'angle BCA inscrit dans une demi-circonférence est donc un angle droit.

3° En effet, OBA et OCF étant deux sécantes, menées de O à la circonférence ABPF, les cordes BC, AF, qui joignent les points d'intersection, sont antiparallèles.

4° Les triangles semblables OBC, OFA donnent

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OF};$$

et comme $OA = a$, on a

$$\frac{OB}{OC} = \frac{c}{a} = e.$$

Or : $\quad 2OB = 2OD - 2DF = PF' - PF, \quad OC = PQ;$

d'où
$$\frac{PF' - PF}{PQ} = 2e.$$

Nota. — Solutions analogues par Mme Ve F. Prime et MM. : B. Sollertinsky; Ch. Michel élève au Collège Chaptal. La première partie a été donnée par M. d'Ocagne dans une Note sur les applications de la géométrie cinématique (*Nouvelles Annales*, 1880, p. 270).

QUESTIONS PROPOSÉES

434. — Soit un triangle ABC, inscrit dans un cercle de rayon R et tel que $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$ soit constant; appelons Ω et Ω' les centres isologiques de ce triangle, c'est-à-dire les points pour lesquels on a

$$\frac{\Omega A}{BC} = \frac{\Omega B}{CA} = \frac{\Omega C}{AB} = \lambda$$

$$\frac{\Omega' A}{BC} = \frac{\Omega' B}{CA} = \frac{\Omega' C}{AB} = \lambda'$$

1° Pour tous les triangles ABC, λ et λ' conserveront une valeur fixe;

2° Le produit $\lambda\lambda'$ sera égal à $\frac{R^2}{D^2}$ en désignant par D la distance constante de l'orthocentre au centre du cercle donné.

(E. Lemoine.)

435. — Deux circonférences Δ, Δ' se touchent au point A; deux droites rectangulaires rencontrent ces circonférences respectivement aux points B, C; B', C'. Démontrer que la somme des angles aigus formés par les droites BAB', CAC' est égale à un angle droit. *(Mannheim.)*

436. — Démontrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\alpha+\beta & \cos(\alpha+\beta+\gamma) & \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta & \cos\beta+\gamma & \cos(\beta+\gamma+\delta) \\ \cos(\alpha+\beta) & \cos\beta & 1 & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \\ \cos(\alpha+\beta+\gamma) & \cos(\beta+\gamma+\delta) & \cos\gamma & 1 & \cos\delta \\ \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) & \cos(\beta+\gamma+\delta) & \cos(\gamma+\delta) & \cos\delta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(W. J. Greenstreet, M. A.)

ERRATA

Page 80, ligne 2 en remontant. Entre *p'q'r'* et *des points*, intercaler ces mots : *formés par les projections.*

Page 82, ligne 7 en remontant, *au lieu de* A et M, *lire* A et H.

Page 83, ligne 6, *au lieu de* AN, *lire* AM.

Page 85, dans l'équation (3) *au lieu de* $\frac{S^2}{PQ^2}$, *lire* $\frac{S^2}{PQ^3}$.

Page 87, ligne 8 (en remontant) *au lieu de* $\frac{A'C'}{BC'}$, *lire* $\frac{A'C'}{B'C'}$.

Page 89, ligne 2 (en remontant) et page 90, ligne 19 *au lieu de* (fig. 4), *lire* (fig. 5).

Page 91, ligne 12, *au lieu de :* ont le milieu commun projection, *lire* ont pour milieu commun la projection.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 8956-4-92.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès,**

(*Suite*, voir page 97.)

SITUATION ET CONSTRUCTION DES POINTS DOUBLES ω, ω_a, ω_b, ω_c.

6° Ces quatre points étant respectivement les transformés de I_v, I_1, I_B, I_C. Ainsi *1°* ω *et* ω_a *sont sur une même circonférence avec* A *et* v *et sur une même circonférence avec* B *et* C, *et il en est de même des points* ω_b *et* ω_c; *2°* ω *et* ω_b *sont sur une même circonférence avec* B *et* v *et sur une même circonférence avec* C *et* A, *et il en est de même de* ω_c *et* ω_a; *3°* ω *et* ω_c *sont sur une même circonférence avec* C *et* v *et sur une même circonférence avec* A *et* B; *la même chose a lieu pour* ω_a *et* ω_b. Ceci justifie la notation adoptée pour ces points, mais ne suffit pas pour la déterminer ; car rien n'est changé dans l'énoncé de ces résultats si l'on permute ω et ω_a et en même temps ω_b et ω_c.

Voici un caractère qui différentie nettement les quatre points entre eux. Pour abréger le langage, lorsque deux points sont tous les deux intérieurs ou tous les deux extérieurs à une circonférence, nous dirons qu'ils sont *isothétiques* relativement à cette circonférence ; et, si l'un est intérieur et l'autre extérieur, qu'ils sont *antithétiques*. — *Le point* ω *est antithétique du point* v *relativement à la circonférence* ABC, *les trois autres étant isothétiques de* v, *le point* ω_a *est antithétique de* A *relativement à la circonférence* vBC, *les trois autres étant isothétiques; le point* ω_b *est antithétique de* B *relativement à la circonférence* vCA, *les trois autres étant isothétiques ; le point* ω_c *est antithétique de* C *relativement à la circonférence* vAB, *les trois autres étant isothétiques.*

La première partie résulte de ce que, parmi les quatre points I_1, I_v, I_B, I_C, le point I_v est le seul qui soit à l'opposé de V, relativement à BC. Pour la seconde partie, on voit que I_1 est le seul des points I qui soit intérieur à la circonférence VBC; si le pôle A est aussi intérieur, le transformé ω_a de I est

extérieur à la circonférence vBC transformée de la première, tandis que ω_a, ω_b, ω_c sont intérieurs, et le contraire si A est extérieur. La troisième partie tient à ce que, seul des quatre points I, le point I_c est à l'opposé de C relativement à VB, et par suite son transformé ω_b est le seul des points ω qui soit antithétique de B relativement à la circonférence vCA. Même explication pour la quatrième partie.

Si l'on considère les points V_1, V_2, isocycliques du conjugué de W relativement à B et CA, à C et BA, comme V l'était relativement à A et BC, et les centres I'_1, I'_{V_1}, I'_C, I'_A ; I''_1, I''_{V_2}, I''_A, I''_B des cercles inscrits et circonscrits aux triangles V_1CA, V_2AB ; les transformés de ces cercles relativement à BCA et CAB ; sont encore les points ω et comme les transformés de V_1 et V_2 sont toujours le même point v, le caractère différentiel des quatre points ω subsiste ; ω est la transformée de I'_{V_1} et celui de I''_{V_2}, ω_a celui de $I'_{C'}$, et celui de I''_B, ω_b celui de I'_1 et celui de I''_A, ω_c celui de I'_A et celui de I''_1. De sorte que *relativement aux trois triangles* ABC, BCA, CAB *les trois points* I_V, $I'_{V'}$, $I''_{V''}$ *ont le même transformé* ω, *les trois points* I_1, I'_C, I''_B *le même transformé* ω_a, *les trois points* I_C, I'_1, I''_A *le même transformé* ω_b *et les trois points* I_B, I'_A, I''_1 *le même transformé de* ω_c. En conséquence : ω_a, ω_b, ω_c *sont respectivement les tranformés, relativement aux mêmes triangles, des centres* I_1, I'_1, I''_1 *des cercles inscrits à* VBC, V_1CA, V_2AB. Ce qui suffirait pour déterminer la notation adoptée dans la désignation de ces points.

Appelons θ, θ' les deux cercles orthogonaux tracés par A et v tangentiellement aux deux bissectrices de tAt' (voir 1°), ces cercles sont les transformés des deux bissectrices VI_1I_V, VI_BI_C de l'angle BVC. Donc ω, ω_a sont sur θ, ω_b, ω_c sur θ'. Comme I_1, I_V sont d'un même côté de V et I_B, I_C de part et d'autre, ω, ω_a sont d'un même côté de Av, ω_b, ω_c de part et d'autre. Les milieux de I_1I_V, I_BI_C étant les extrémités du diamètre perpendiculaire à BC dans la circonférence VBC, si g, g' sont les intersections de la circonférence VBC avec les circonférences θ, θ', *les points* ω, ω_a *sont harmoniquement opposés relativement à* Ag, *et* ω_b, ω_c *relativement à* Ag'. De plus, le cercle Agg' est orthogonal au cercle vBC, et il se confond avec le cercle d'Apollonius, relatif à A, dans ABC.

Désignons par τ, τ' deux cercles passant par B et C et respectivement orthogonaux à θ et θ'. Ils sont les transformés des cercles qui ont I_1I_v, I_BI_C pour diamètres. Par conséquent ω, ω_a sont sur τ, ω_b, ω_c sur τ'. De là résulte *la construction des points* ω, ω_a *par l'intersection de* θ *et* τ, *et des points* ω_b, ω_c *par l'intersection de* θ' *et* τ'. Observons que le point g, transformé du centre du cercle décrit sur I_1I_v comme diamètre, est le conjugué de A relativement à τ, et g' le conjugué de A relativement à τ', et aussi que les cercles τ et τ' sont orthogonaux entre eux.

Dans le cas des points isoptiques, les points ω et ω_a ou bien ω_b et ω_c (suivant la grandeur des angles de ABC) sont H_a et un point à l'infini. Alors les cercles θ et θ' deviennent la droite AH et le cercle décrit sur AH comme diamètre, et les cercles τ et τ' la droite BC et le cercle ayant BC pour diamètre.

Les relations

$$CI_v.CI_B = CI_1.CI_C = CB.CV, BI_v.BI_C = BI_1.BI_B = BC.BV$$

transformées relativement à ABC et la relation

$$AI'_{V_1}.AI'_C = AI'_1.AI'_A = AC.AV_1,$$

transformée relativement à BCA conduisent aux égalités

$$\frac{C\omega.C\omega_a}{B\omega.B\omega_a} = \frac{C\omega_b.C\omega_c}{B\omega_b.B\omega_c} = \frac{b.Cv}{c.Bv},$$

$$\frac{A\omega.A\omega_b}{C\omega.C\omega_b} = \frac{A\omega_a.A\omega_c}{C\omega_a.C\omega_c} = \frac{c.Av}{a.Cv},$$

$$\frac{B\omega.B\omega_c}{A\omega.A\omega_c} = \frac{B\omega_a.B\omega_b}{A\omega_a.A\omega_b} = \frac{a.Bv}{b.Av},$$

qui se réduisent à cinq distinctes, car en les multipliant membre à membre, deux se confondent dans la relation

$$\frac{A\omega_b}{A\omega_c}\cdot\frac{B\omega_c}{B\omega_a}\cdot\frac{C\omega_a}{C\omega_b} = 1.$$

La signification géométrique de celle-ci est que les bissectrices intérieures et extérieures des angles $\omega_b A \omega_c$, $\omega_c B \omega_a$, $\omega_a C \omega_b$ déterminent sur $\omega_b\omega_c$, $\omega_c\omega_a$, $\omega_a\omega_b$ trois points intérieurs; les droites qui les joignent respectivement à ω_a, ω_b. ω concourent en trois points extérieurs en ligne droite.

Des relations

$$VI_1.VI_v = VI_B.VI_C = VB.VC$$

et des autres pareilles en V_1V_2, on tire

$$\frac{vA.v\omega.v\omega_a}{a.A\omega.A\omega_a} = \frac{vA.v\omega_b v\omega_c}{a.A\omega_b.A\omega_c} = \frac{vB.v\omega.v\omega_b}{b.B\omega.B\omega_b} = \frac{vB.v\omega_a.v\omega_c}{b.B\omega_a.B\omega_c}$$
$$= \frac{vC.v\omega.v\omega_c}{c.C\omega.C\omega_c} = \frac{vC.v\omega_a.v\omega_b}{c.C\omega_a.C\omega_b} = \frac{vA.vB.vC}{abc}.$$

A noter aussi

$$\frac{v\omega_b}{v\omega_c} = \frac{B\omega}{C\omega}.\frac{C\omega_b}{B\omega_c},$$

et deux autres égalités analogues, qui s'en déduisent par permutation.

7° Au lieu de se donner le point W pour définir un système de points complémentaires, on peut se donner l'un des quatre points ω, ω_a, ω_b, ω_c, ainsi que le montre le problème suivant.

Problème. — *Etant donnés le triangle* ABC *et l'un des quatre points doubles, construire les trois autres et le point* W.

Appelons ω_1 le point double donné. L'intersection du cercle ω_1BC et du cercle orthogonal passant par A et ω_1 donne le point ω_2, qui formera avec ω_1 soit le groupe ω, ω_a soit le groupe ω_b, ω_c. Les deux autres points ω_3, ω_4 sont à la rencontre d'un cercle passant par B et C et orthogonal au cercle ω_1BC et d'un cercle passant par A et orthogonal à la fois au précédent et au cercle $A\omega_1\omega_2$. On a d'ailleurs v par l'intersection des cercles $A\omega_1\omega_2$, $A\omega_3\omega_4$ — W s'obtient ensuite comme conjugué de l'isogonal de v.

Ou bien encore, ω_1 étant donné, on construit le conjugué g de A relativement au cercle ω_1BC, et on prend le point harmoniquement opposé à ω_1 relativement à Ag, c'est ω_2. L'intersection des cercles ω_1CA, ω_2AB et celle des cercles ω_1AB, ω_2AC donnent ω_3 et ω_4. Cette dernière construction traduit assez exactement la construction indirecte qui consisterait, après avoir déduit de ω_1 l'un des points I, à en conclure les trois autres points I, sauf à revenir de ceux-ci aux points ω.

Il importe de remarquer qu'en se donnant ω_1 on ne peut pas spécifier lequel des points ω, ω_a, ω_b, ω_c, définis plus haut, il représente. Cette spécification ne peut être faite qu'à posteriori, d'après les positions qu'occupent les points obtenus et le point donné. Comme autre construction, ω_1' étant l'iso-

cyclique du point donné ω_1 on prend le point ω_2' diamétralement opposé à ω_1' sur la circonférence ω_1BC, le point ω_3' à la rencontre de $B\omega_1'$ et $C\omega_2'$, le point ω_4' à la rencontre de $C\omega_1'$ et de $B\omega_2'$, et le point W′ à la rencontre de $\omega_1'\omega_2'$ et de $\omega_3'\omega_4'$. Les isocycliques de ces quatre points ω_2', ω_3', ω_4' W′, seront ω_2, ω_3, ω_4, W. On le voit par leurs coordonnées angulaires qui, étant $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\mu}{2}$, $\frac{\nu}{2}$ pour le point donné ω_1 seront pour les points obtenus

$$\left(\frac{\lambda}{2},\ \frac{\mu}{2}+\frac{\pi}{2},\ \frac{\nu}{2}+\frac{\pi}{2}\right),\quad \left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{2},\ \frac{\mu}{2},\ \frac{\nu}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{2},\ \frac{\mu}{2}+\frac{\pi}{2},\ \frac{\nu}{2}\right),\quad (\lambda,\ \mu,\ \nu).$$

8° **Problème.** — *1° Sur chacune des quatre circonférences* θ, θ', τ, τ' *ou* $Av\omega\omega_a$, $Av\omega_b\omega_c$, $BC\omega\omega_a$, $BC\omega_b\omega_c$, *il y a une infinité de couples de points complémentaires, les deux points de chaque couple situé sur* θ *ou bien sur* θ' *sont conjugués relativement à* τ *ou bien* τ'; *et les deux points de chaque couple situé sur* τ *ou* τ' *sont conjugués relativement à* θ *ou bien à* θ'. *2° Si* MM′ *est un couple quelconque situé sur le cercle* τ *ou cercle* $BC\omega\omega_a$, *les cercles variables* ω_bMM′, ω_cMM′ *passent, chacun, par un second point fixe qui est le conjugué de* ω_b *ou de* ω_c *relativement au cercle* θ. *Même chose pour* τ' *en permutant* $\omega_b\omega_c$ *avec* ω,ω_a *et* θ *avec* θ'. *3° Si* MM′ *est un couple quelconque situé sur le cercle* θ *ou cercle* $Av\omega\omega_a$, *les cercles variables* ω_bMM′, ω_cMM′ *passent chacun par un second point fixe qui est harmoniquement opposé à* ω_b *ou* ω_c *relativement à* BC. Même chose pour θ', en permutant ω_b, ω_c et ω_1, ω_a.

La première partie de ce théorème remarquable résulte de ce que (d'après § XXII *bis* 1°) il y a sur les droites I_1I_v, I_BI_C, et sur les cercles qui les ont pour diamètres une infinité de couples isogonaux; ceux des droites les divisent harmoniquement, c'est-à-dire sont conjugués relativement aux cercles et ceux des cercles sont symétriques relativement aux droites.

Les deuxième et troisième parties résultent de ce que, d'après 2° du même paragraphe, pour tout couple isogonal

mm' situé sur le cercle qui a I_1I_v pour diamètre les cercles I_Bmm', I_Cmm' passent par le symétrique de I_B ou de I_C relativement à I_1I_v, et pour tout couple isogonal mm' situé sur la droite I_1I_v les cercles I_Bmm', I_Cmm' passent par le point harmoniquement opposé à I_B ou I_C relativement à BC.

Remarque importante. — Les quatre cercles $Bv\omega\omega_b$, $Bv\omega_c\omega_a$, $CA\omega\omega_b$, $CA\omega_c\omega_a$ et les quatre cercles $Cv\omega\omega_c$, $Cv\omega_a\omega_b$, $AB\omega\omega_c$, $AB\omega_a\omega_b$ jouissent de propriétés pareilles. En tout douze cercles qui coïncident avec le cercle ABC dans le cas des points conjugués, et dont six se réduisent à des droites dans le cas des points isoptiques parce que l'un des points ω est alors à l'infini, et aussi dans le cas des points isogonaux, parce qu'alors v est à l'infini.

Application du théorème aux points isoptiques. — La première partie appliquée aux points isoptiques reproduit un résultat connu, les deux autres donnent cette proposition.

Théorème sur les points isoptiques. — *Si* MM′ *est un couple isoptique quelconque situé sur le cercle qui a* BC *pour diamètre, le cercle variable* H_aMM' *rencontre* AH *en un point fixe, conjugué harmonique de* H_a *relativement à* AH*; et si* MM′ *est un couple isoptique quelconque situé sur le cercle qui a pour diamètre* AH, *le cercle variable* H_aMM' *rencontre* BC *en un point fixe, conjugué harmonique de* H_a *relativement à* BC.

9° Théorème. — *La circonférence passant par l'un des sommets* A *et deux quelconques des points* ω, ω_a, ω_b, ω_c *est orthogonale à celle qui passe par* A *et les deux autres. Elles se coupent en l'un des points* B, C *ou* v.

Car la droite qui joint deux quelconques des quatre points I_1, I_v, I_B, I_C est perpendiculaire à celle qui joint les deux autres et la rencontre en l'un des sommets de VBC.

De là la solution de ce problème : *Étant donné le point* A *et trois des points* ω, *construire le quatrième, ainsi que* B, C *et* W.

Soient donnés A, le couple ω_b, ω_c, et l'un des points ω_a du couple ω, ω_a. Le point cherché ω se trouvera à la rencontre d'une circonférence passant par A et ω_b et orthogonale à la circonférence $A\omega_a\omega_c$ et d'une circonférence passant par A et ω_c et orthogonale à la circonférence $A\omega_a\omega_b$; B est à la rencontre

des circonférences $A\omega_a\omega_b$, $A\omega\omega_c$; C à la rencontre des circonférences $A\omega_a\omega_c$, $A\omega\omega_b$; enfin v à la rencontre des circonférences $A\omega\omega_a$, $A\omega_b\omega_c$. On a W comme conjugué de l'isogonal de v.

10° **Théorème.** — *Les podaires de chacun des points* ω, ω_a, ω_b, ω_c *relativement au triangle formé par les trois autres sont directement semblables entre eux et aux triangles* VBC, V_1CA, V_2AB.

Ces podaires en effet, d'après le § XII, sont directement semblables aux podaires de chacun des points I_1, I_V, I_B, I_C relativement au triangle formé par les trois autres, et ces derniers podaires se confondent avec le triangle VBC.

L'application aux points isoptiques donne cette proposition : *Si l'on projette un des trois points* H_a, H_b, H_c *sur la droite qui joint les deux autres et sur deux parallèles quelconques menées par ces deux autres, on obtient un triangle directement semblable à* LBC, (L transformé de H).

11° **Théorème.** — *Si* MM′ *est un couple quelconque de points complémentaires, les cercles* MBC, M′BC *sont chacun le lieu des conjugués des points de l'autre relativement au cercle* $BC\omega\omega_a$ *(cercle* τ*) et aussi relativement au cercle* $BC\omega_b\omega_c$ *(cercle* τ'*).*

Car, d'après le 3° du § XXII bis, les cercles mBC, m'BC ont leurs points deux à deux conjugués relativement au cercle décrit sur $I_1 I_V$ comme diamètre, et deux à deux conjugués relativement au cercle décrit sur $I_B I_C$.

12° Généralisation de la propriété que possèdent les points isoptiques d'être aussi isoptiques relativement a HBC, HCA, HAB.

Théorème. — *Deux points quelconques* M, M′ *complémentaires relativement à un point donné* W *dans le triangle* ABC *sont aussi complémentaires relativement au même point* W *dans chacun des triangles* VBC, VCA, VAB. *Et le point directeur est alors ou* A, *ou* B, *ou* C.

Nous allons faire voir que la somme des angles sous lesquels de M et M′ on voit chacune des droites Av, Bv, Cv est égale à l'angle sous lequel cette droite est vue de W; par exemple (MA, Mv) + (M′A, M′v) = (WA, Wv).

D'après le 2° les tangentes Ax, Ax' aux circonférences MAv,

M'Av sont antiparallèles relativement à l'angle tAt' formé par les tangentes At, At' aux circonférences vAB, vAC; (Ax, At) + (Ax', At') = o. Or (MA, Mv) = (Ax, Av) = (Ax, At) + (At, Av) et (M'A, M'v) = (Ax', Av) = (Ax', At') + (At', Av). Donc (MA, Mv) + (M'A, M'v) = (At, Av) + (At', Av) = (BA, Bv) + (CA, Cv). Cette somme, quand M et M' varient, étant constante est double de l'angle (ωA, ωv) sous lequel de l'un quelconque des points doubles ω on voit Av, puisque en ce point double les deux points M, M' se confondent. Il reste à montrer que l'on a aussi (WA, Wv) = 2(ωA, ωv). Comme la circonférence AvW a pour tansformée la droite Vw, où V et w sont les transformés de v et W, et que Av a pour tranformé AV, l'angle (WA, Wv) est égal à (Vw, VA). Or, d'après le théorème préliminaire sur les points complémentaires (1°), le point W et un point à l'infini étant complémentaires relativement à W, leurs transformés w et A sont isogonaux relativement à VBC, et par conséquent Vw et VA sont antiparallèles dans l'angle BVC. Si donc Δ désigne une des bissectrices de cet angle (Vw, VA) = 2(Δ, VA). Mais Δ est la transformée de l'une des circonférences ωAv, de sorte que (Δ, VA) = (ωA, ωv). Donc (WA, Wv) = 2(ωA, ωv) = (MA, Mv) + (M'A, M'v). Et comme la même chose a lieu pour Bv et Cv, M et M' sont complémentaires relativement à W dans chacun des triangles vBC, vCA, vAB.

Relativement au triangle ABC, le point directeur du système est v. Nous allons prouver que relativement au triangle vBC, le point directeur est A, c'est-à-dire que A est l'isogonal du conjugué de W relativement à vBC. Désignons par α, β, γ les angles sous lesquels Av, Bv, Cv, sont vus de W; les coordonnées angulaires de W relativement à vBC seront α, γ, $-\beta$. Il suffit de montrer que celles de A relativement au même triangle sont $\lambda - A_1$, $\gamma - B_1$, $-\beta - C_1$ A_1, B_1, C_1 étant les angles de vBC; c'est-à-dire que (AB, AC) $= \lambda - A_1$, (AC, Av) $= \gamma - B_1$, (Av, vB) $= -\beta - C_1$. La première égalité est évidente, puisque $A_1 = \lambda - A$. Pour la seconde on a γ = (AC, Av) + (BC, Bv) et B_1 = (BC, Bv). Donc (AC, Av) $= \gamma - B_1$. La troisième se voit de même, et elle est d'ailleurs une conséquence des deux autres.

Remarque I. — Les coordonnées angulaires de W relativement à ABC étant λ, μ, ν, relativement à VBC elles sont, comme nous l'avons déjà dit, λ, γ, $-\beta$; relativement à VCA, elles sont μ, α, $-\gamma$; enfin, relativement à VAB, ν, β, $-\alpha$. Il en résulte les relations $\beta - \gamma = \lambda$, $\gamma - \alpha = \mu$, $\alpha - \beta = \nu$, qui sont d'ailleurs évidentes d'après les expressions de α, β, γ

$$\alpha = (BA, Bv) + (CA, Cv), \quad \beta = (CB, Cv) + (AB, Av),$$
$$\gamma = (AC, Av) + (BC, Bv).$$

Remarque II. — L'évaluation des angles α, β, γ en fonction de λ, μ, ν peut se ramener à celle des angles (Av, Av'), (Bv, Bv'), (Cv, Cv') sous lesquels de A, B, C on voit la droite vv' qui joint le point v à son isogonal v'. En désignant par α_1, β_1, γ_1 ces derniers angles on a

$$\alpha + \alpha_1 = \nu - \mu + B - C, \quad \beta + \beta_1 = \lambda - \nu + C - A,$$
$$\gamma + \gamma_1 = \mu - \lambda + A - B.$$

Car $\alpha = (BA, Bv) + CA, Cv) = (BA, Av) + (Av, Bv) + (CA, Av) + (Av, Cv)$.

Or, $(Av, Bv) = \nu - C$, $(Av, Cv) = -(\mu - B)$,

$(BA, Av) + (CA, Av) = (BA, Av) + (Av', AB) = (Av', Av) = -\alpha_1$.

Remarquons la relation $(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 0$ qui montre que lorsqu'une des deux sommes $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$ est nulle, l'autre l'est aussi.

XIII. — Propriétés du point W et des points qui s'y rattachent

1. — *Le transformé* w *de* W *et le point* V′ *où* Av *rencontre la circonférence* vBC *sont symétriques relativement à* BC. *Les transformés* w_a, w_b, w_c *et* W *relativement à* vBC, vCA, vAB *sont respectivement les symétriques relativement à* BC, CA, AB *des trois points où* vA, vB, vC *rencontrent la circonférence* ABC.

Si, en effet, v' est l'isogonal de v, V′ est le transformé de v' et comme v' et W sont conjugués, leurs transformés V′, w sont symétriques relativement à BC.

Désignons, de même, par v'_a, v'_b, v'_c, les isogonaux de A, B, C relativement à vBC, vCA, vAB. Le point où Av rencontre la circonférence ABC est le transformé de v'_a relativement à vBC; donc ce point et w_a sont les transformés relativement à vBC de deux points conjugués v'_a, W, ils sont symétriques relativement à BC, etc.

Corollaire. — Les symétriques de w_a, w_b, w_c relativement à BC, CA, AB forment un triangle directement semblable au podaire de v relativement à ABC.

2. — *Trois quelconques des quatre points* v, v'_a, v'_b, v'_c *sont les symétriques du quatrième relativement aux côtés de celui des triangles* ABC, vBC, vCA, vAB *qui correspond à ce quatrième.*

Par exemple v'_a, v'_b, v'_c sont les symétriques de v' relativement à BC, CA, AB, car les angles de v'BC sont $A - A_1$, $B - B_1$, $C - C_1$ et ceux de v'_aBC $A_1 - A$, $B_1 - B$, $C_1 - C$, de sorte que v' et v'_a sont symétriques relativement à BC. De même v' et v'_b relativement à CA, etc.

3. — v'_a, v'_b, v'_c *sont équidistants de* v, *et la distance est égale au diamètre* 2ρ *du cercle circonscrit au podaire de* v *relativement à* ABC — v', v'_b, v'_c *sont équidistantes de* A *et la distance est égale au diamètre* $2\rho_a$ *du cercle circonscrit au podaire de* A *relativement à* vBC, etc.

Cette propriété dérive de la précédente. Directement si P est la projection de v' sur BC et K le milieu de vv' ou centre du premier podaire de l'énoncé, on a $vv'_a = 2KP' = 2\rho$. Et ainsi $vv'_a = vv'_b = vv'_c = 2\rho$. De même $Av' = Av'_b = Av'_c = 2\rho_a$, $Bv' = Bv'_a = Bv'_c = 2\rho_b$, $Cv' = Cv'_a = Cv'_b = 2\rho_c$, ρ_b et ρ_c se rapportant aux podaires de B relativement à vCA, de C relativement à vAB.

4. — *Les rayons* ρ, ρ_a, ρ_b, ρ_c *des podaires sont inversement proportionnels aux rayons* R, R_a, R_b, R_c *des cercles* ABC, vBC, vCA, vAB.

D'après la relation $\frac{AM}{AM'} = OG$ du § XXI, on a $\frac{Av}{Av'} = \frac{OO_a}{R}$, O_a étant le centre du cercle vBC, et pour la même raison $\frac{vA}{vv'_a} = \frac{O_aO}{R_a}$. De là $\frac{Av'}{R} = \frac{vv'_a}{R_a}$ ou $\rho R = \rho_a R_a$.

5. *Le point* W *satisfait à la série d'égalités*

$$\frac{AW}{2\rho_a} = \frac{BW}{2\rho_b} = \frac{CW}{2\rho_c} = \frac{vW}{2\rho} = \frac{OW}{R} = \frac{O_aW}{R_a} = \frac{O_bW}{R_b} = \frac{O_cW}{R_c}.$$

Ces égalités résultent de ce que W est le conjugué de v' relativement à ABC, de v'_a relativement à vBC, etc.

On remarquera la signification géométrique des trois dernières. L'égalité $\frac{OW}{R} = \frac{O_aW}{R_a}$ *exprime que* O *et* O_a *sont conjugués relativement au cercle* WBC; et l'égalité $\frac{O_bW}{R_b} = \frac{O_cW}{R_c}$ *que* W *est situé sur le cercle d'Apollonius relatif à* A *dans* AO_bO_c.

(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE ET DE MÉCANIQUE

Par M. **Louis Bénézech.**

(*Suite*, voir p. 107.)

Cas particuliers. — 1° Lorsqu'un plan quelconque coupe les droites qui joignent un point quelconque M, aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4, et au centre de gravité G d'un tétraèdre, aux points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, G', on a

$$\frac{MA_1}{MA'_1} + \frac{MA_2}{MA'_2} + \frac{MA_3}{MA'_3} + \frac{MA_4}{MA'_4} = \frac{4.MG}{MG'}.$$

2° Lorsqu'un plan quelconque coupe les droites qui joignent le centre de gravité G d'un tétraèdre aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4, aux points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, on a,

$$\frac{m_1}{GA'_1} + \frac{m_2}{GA'_2} + \frac{m_3}{GA'_3} + \frac{m_4}{GA'_4} = 0,$$

m_1, m_2, m_3, m_4 désignant les longueurs des médianes du tétraèdre.

3° Lorsqu'un plan quelconque coupe les droites qui joignent le centre O, de la sphère circonscrite à un tétraèdre, aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4, aux points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, on a

$$\frac{D_1}{OA'_1} + \frac{D_2}{OA'_2} + \frac{D_3}{OA'_3} + \frac{D_4}{OA'_4} = 0,$$

D_1, D_2, D_3, D_4, ayant leur signification ordinaire (v. *J. E.* 1890, p. 242).

4° Lorsqu'une transversale coupe les droites qui joignent le centre O du cercle circonscrit à un triangle, aux sommets

A, B, C, aux points A′, B′, C′, on a

$$\frac{\sin 2A}{OA'} + \frac{\sin 2B}{OB'} + \frac{\sin 2C}{OC'} = 0.$$

5° Lorsqu'une transversale coupe les droites qui joignent le point de Lemoine K d'un triangle aux sommets A, B, C, aux points A′, B′, C′, on a

$$\frac{am_a}{KA'} + \frac{bm_b}{KB'} + \frac{cm_c}{KC'} = 0,$$

m_a, m_b, m_c désignant les longueurs des médianes du triangle, etc.

Théorème XVI. — Lorsqu'une sphère quelconque, passant par un point M, coupe les n segments de droites obtenus en abaissant, du point M, des perpendiculaires sur les n faces d'un polyèdre convexe, aux points P_1, P_2, ... P_n, on a la relation

$$S_1 . MP_1 + S_2 . MP_2 + \ldots + S_n . MP_n = 0,$$

S_1, S_2, ... S_n désignant des nombres proportionnels aux aires des faces du polyèdre.

Portons, en effet, sur MP_1, MP_2 ... MP_n, dans le sens positif, des longueurs MP_1', ... MP_n', respectivement proportionnelles à S_1, ... S_n. On sait que la somme des projections, sur un plan quelconque, de toutes les faces du polyèdre, est égale à zéro ; par suite, la somme des projections des segments MP_1', ... MP_n', sur un axe quelconque, est nulle. Ces segments se font donc équilibre, et, si l'on applique le théorème XIII, il vient :

$$\sum MP_1 . MP_1' = \sum S_1 . MP_1 = 0.$$

On voit aussi, par application du corollaire du théorème XIII, que, Q_1, Q_2, ... Q_n désignant les points où un plan quelconque coupe les segments considérés, l'on a :

$$\sum \frac{MP_1'}{MQ_1} = \sum \frac{S_1}{MQ_1} = 0.$$

D'où :

Théorème XVII. — Lorsqu'un plan quelconque coupe les n segments de droites obtenus en abaissant, d'un point quelconque M, des perpendiculaires sur les n faces d'un polyèdre convexe, aux points Q_1, Q_2, ... Q_n, on a la relation

$$\frac{S_1}{MQ_1} + \frac{S_2}{MQ_2} + \ldots + \frac{S_n}{MQ_n} = 0,$$

$S_1, S_2, \ldots S_n$ désignant des nombres proportionnels aux aires des faces dupolyèdre.

V. **Théorème XVIII.** — Si les points d'application $A'_1, A'_2 \ldots A'_n$ de n forces parallèles $f_1, f_2, \ldots f_n$ se déplacent sur les côtés $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, d'un polygone quelconque, avec des vitesses uniformes, respectivement proportionnelles à $\frac{a_1}{f_1}, \frac{a_2}{f_3}, \ldots \frac{a_n}{f_n}$, $a_1, a_2, \ldots a_n$ désignant les côtés successifs du polygone; le centre des forces parallèles restera immobile.

Tout revient à prouver que la distance du centre des forces parallèles du système donné, dans ses diverses positions, à un plan quelconque P, demeure constante.

Soit donc, pour une certaine valeur du temps, O′ le centre des forces parallèles appliquées en $A'_1, A'_2, \ldots A'_n$, et, pour une autre valeur du temps, O″ le centre des forces parallèles appliquées en

$$A''_1, A''_2, \ldots A''_n,$$

Désignons par $p'_1, p'_2, \ldots p'_n; p''_1, \ldots p''_n; \rho', \rho''$ les distances algébriques des points $A'_1, A'_2, \ldots A'_n$; $A''_1, \ldots A''_n$; o', o'' au plan P. On a

$$\frac{\frac{A'_1A''_1}{A_1A_2}}{f_1} = \frac{\frac{A'_2A''_2}{A_2A_3}}{f_2} = \ldots = \frac{\frac{A'_nA''_n}{A_nA_1}}{f_n},$$

ou
$$\frac{f_1(p'_1 - p''_1)}{p_1 - p_2} = \frac{f_2(p'_2 - p''_2)}{p_2 - p_3} = \ldots = \frac{f_n(p'_n - p''_n)}{p_n - p_1};$$

d'où l'on tire, en observant que la somme des dénominateurs de ces rapports est nulle,

$$\sum f_1p'_1 = \sum f_1p''_1;$$

et par suite, à cause des formules connues :

$$\sum f_1p'_1 = \rho' \sum f_1, \qquad \sum f_1p''_1 = \rho'' \sum f_1,$$
$$\rho' = \rho''.$$

C. Q. F. D.

Applications. — **Théorème XIX.** — Les coordonnées barycentriques α, β, γ d'un point M, par rapport à un triangle ABC, ne changent pas lorsqu'on prend, pour nouveau triangle de

référence, le triangle A′B′C′ obtenu en portant, sur les côtés AB, BC, CA, des longueurs AA′, BB′, CC′, respectivement portionnelles à $\frac{c}{\alpha}$, $\frac{a}{\beta}$, $\frac{b}{\gamma}$.

Théorème XX. — Les coordonnées barycentriques α, β, γ d'un point M, par rapport à un triangle ABC, ne changent pas lorsqu'on prend, pour nouveau triangle de référence, le triangle A″B″C″ obtenu en portant, sur les côtés AC, CB, BA, des longueurs AA″, CC″, BB″ respectivement proportionnelles à $\frac{b}{\alpha}$, $\frac{a}{\gamma}$, $\frac{c}{\beta}$.

On démontre, sans difficulté, que les réciproques de ces deux théorèmes sont vraies. Ainsi par exemple,

Théorème XXI. — Si les coordonnées barycentriques α, β, γ d'un point M, par rapport à un triangle ABC, ne changent pas lorsqu'on prend, pour nouveau triangle de référence, un triangle dont les sommets A′, B′, C′ sont sur les côtés AB, BC, CA, les longueurs AA′, BB′, CC′ sont respectivement proportionnelles à $\frac{c}{\alpha}$, $\frac{a}{\beta}$, $\frac{b}{\gamma}$.

Remarque. — Ces théorèmes, convenablement appliqués, permettront de trouver un grand nombre de propositions relatives à la géométrie du triangle.

Nous terminerons cette Note en complétant le théorème III. Nous avions, en effet, supposé implicitement que la somme des coefficients α_1, α_2, α_3, α_4 considérés dans cette proposition était différente de zéro. Proposons-nous donc :

Étant donné un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ *; déterminer en grandeur et en direction la résultante des forces représentées en grandeur et en direction par* $\alpha_1 MA_1$, $\alpha_2 MA_2$, $\alpha_3 MA_3$, $\alpha_4 MA_4$, *sachant que* $\Sigma\alpha_1 = 0$.

Soit, sur la face $A_2A_3A_4$, A'_1 le centre des distances proportionnelles du système $(A_2\alpha_2)$ $(A_3\alpha_3)$ $(A_4\alpha_4)$.

La résultante des forces $\alpha_2 MA_2$, $\alpha_3 MA_3$, $\alpha_4 MA_4$ est

$$(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)MA'_1, \quad \text{ou} \quad -\alpha_1 MA'_1.$$

Il suffit donc, pour obtenir la résultante cherchée, de composer les deux forces $\alpha_1 MA_1$, $-\alpha_1 MA'_1$. Or l'on a, par rapport

à un axe de projection quelconque, $\overline{MA_1} - \overline{MA'_1} = \overline{A'_1A_1}$, ou bien $\alpha_1\overline{MA_1} - \alpha_1\overline{MA'_1} = \alpha_1\overline{A'_1A_1}$. Par suite, cette résultante est égale, en grandeur et en signe, à α_1MO, le segment MO étant parallèle et égal, en grandeur et en direction, au segment A'_1A_1.

Il résulte clairement de ceci que, si le point M se déplace dans l'espace, la résultante des forces considérées demeure constante, en grandeur et en direction.

Évaluons la grandeur de cette résultante. D'après une formule connue, on peut écrire :

$$\alpha_2 d_{12} + \alpha_3 d_{13} + \alpha_4 d_{14} = \alpha_2\overline{A'_1A_2}^2 + \alpha_3\overline{A'_1A_3}^2 + \alpha_4\overline{A'_1A_4}^2 + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\overline{A'_1A_1}^2$$

ou, à cause des relations,

$$\alpha_2\overline{A'_1A_2}^2 + \alpha_3\overline{A'_1A_3}^2 + \alpha_4\overline{A'_1A_4}^2 = \frac{\alpha_2\alpha_3 d_{23} + \alpha_3\alpha_4 d_{34} + \alpha_4\alpha_2 d_{42}}{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}.$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\alpha_1,$$

$$\alpha_1^2\overline{A'_1A_1}^2 = -\sum\alpha_1\alpha_2 d_{12}.$$

La résultante est donc égale, en grandeur, à

$$\sqrt{-\sum\alpha_1\alpha_2 d_{12}}.$$

Remarque I. — Si A'_2, A'_3, A'_4 sont, respectivement, les centres des distances proportionnelles des systèmes

$(A_3\alpha_3,\ A_4\alpha_4,\ A_1\alpha_1)$ $(A_4\alpha_4,\ A_1\alpha_1,\ A_2\alpha_2)$ $(A_1\alpha_1,\ A_2\alpha_2,\ A_3\alpha_3)$,

les segments parallèles A'_1A_1, A'_2A_2, A'_3A_3, A'_4A_4 satisfont aux relations :

$$\alpha_1A'_1A_1 = \alpha_2A'_2A_2 = \alpha_3A'_3A_3 = \alpha_4A'_4A_4 = \pm\sqrt{-\Sigma\alpha_1\alpha_2 d_{12}}.$$

Remarque II. — Si α_1, α_2, α_3, α_4 sont quatre quantités astreintes à la seule condition d'avoir leur somme nulle, l'expression $\sum\alpha_1\alpha_2 d_{12}$ est toujours négative.

Remarque III. — On trouve, sans difficulté, par la même méthode, des résultats analogues pour le triangle.

TRANSFORMATION DES FORMULES DES TRIANGLES

Par M. **A. Poulain**, à Angers.

(*Suite*, voir p. 110.)

6. — M. Lemoine a utilisé sa transformation pour la *Nouvelle Géométrie du triangle*. Cette méthode, très féconde, peut être présentée, avec une grande généralité, de la manière suivante :

Étant donné un point M dont les coordonnées barycentriques relatives sont (*)

(4) $\alpha : \beta : \gamma = f_1(A, B, C) : f_2(A, B, C) : f_3(A, B, C)$,

J'appelle *connexe barycentrique* de M, par rapport à a et aux angles A′, B′, C′, dont la somme égale π, un point M′ obtenu en accentuant les lettres α, β, γ et en faisant la transformation connexe sur leurs valeurs $f_1(A, B, C), \ldots$; ce qui donne

(5) $\alpha' : \beta' : \gamma' = f_1(A', B', C') : f_2(A', B', C') : f_3(A', B', C')$.

Pour $A' = -A$, $B' = \pi - B$, $C' = \pi - C$, on a la transformation de M. Lemoine.

De même, M″, *connexe trilinéaire* de M, s'obtient en passant de (**)

(6) $$x : y : z = F_1(A, B, C) : \ldots$$

(7) à $$x'' : y'' : z'' = F_1(A', B', C') : \ldots$$

7. — Étant donnée une ligne $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, j'appelle ligne *connexe barycentrique* celle qui s'en déduit en faisant la transformation sur les coefficients et en accentuant α, β, γ. Il y a de même des lignes *connexes trilinéaires*, etc.

8. — On voit que : 1° *Toute ligne et sa connexe barycentrique ou trilinéaire sont de même degré; 2° la ligne connexe est le lieu du point* M′, *connexe du point générateur de la ligne donnée.* Car

(*) Pour pouvoir appliquer le théorème fondamental, je supposerai désormais que les valeurs des coordonnées ne renferment pas de radicaux; sinon, certains d'entre eux devraient parfois être changés de signes, pour que les théorèmes subsistent.

(**) On pourrait considérer de même des *connexes tripolaires*, *cartésiens* (en traçant deux axes cartésiens dans le plan du triangle), etc. Je ne m'en occuperai pas.

si l'équation $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ est vérifiée par les valeurs de (4), $f(\alpha', \beta', \gamma') = 0$ le sera par les valeurs de (5), en vertu du théorème fondamental, puisqu'il s'agit d'une relation entre les éléments d'un triangle quelconque; 3° *l'homographie se conserve*, puisque les formules de transformation subissent la transformation connexe (**2**) et restent alors linéaires.

9. Corollaires. — *1° Si trois points sont en ligne droite, il en est de même de leurs connexes. Il y a un théorème analogue pour cinq points d'une conique.* On voit déjà la fécondité de cette transformation. Étant donné un alignement de trois points, on en trouve sans calcul une trentaine d'autres (**5**), à l'aide des connexes barycentriques et autant avec les trilinéaires.

Ex. : Considérons les angles $\pi - 2A, \ldots$ Sachant que la droite qui joint G au point (cos A, ...) contient $\Gamma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \ldots\right)$, on en conclut que l'alignement de G et (cos 2A, ...) qui passe passe par K contient H_0 (cot A, ...).

2° L'intersection de deux lignes a pour connexe l'intersection des lignes connexes.

3° Si trois droites sont concourantes, il en est de même de leurs connexes.

4° Deux figures homologiques se transforment donc en figures homologiques.

5° *Les tangentes*, étant des limites de sécantes, *se transforment en tangentes aux points connexes.* Le calcul montre même immédiatement que *la polaire d'un point par rapport à une conique se transforme en polaire du point connexe par rapport à la conique connexe.*

Dès lors, *des droites connexes ont pour enveloppes des courbes connexes.*

10. — En particulier, dans les connexes *barycentriques*, la droite de l'infini se transforme en elle-même. Donc, dans cette transformation, *des droites parallèles sont remplacées par des parallèles*, comme concourant sur la droite de l'infini. *Toute parabole*, étant tangente à cette droite, *devient une parabole.* — *Deux figures homothétiques se transforment en d'autres qui sont*

homothétiques: pour les *connexes trilinéaires*, c'est l'axe antiorthique représenté par $x + y + z = 0$, qui se transforme en lui-même.

Dans les *connexes barycentriques*, si deux points sont complémentaires, il en est de même des deux transformées. On a un théorème analogue pour les anticomplémentaires, isobariques, semi-réciproques, réciproques, associés à l'infini et potentiels.

Dans les *connexes trilinéaires*, cette propriété s'applique aux points inverses, supplémentaires, anti-supplémentaires, qui sont définis par une relation de coordonnées trilinéaires.

11. — La transformation de M. Lemoine jouit, presque seule, de propriétés métriques remarquables. Quand on y passe d'une figure à sa connexe : *1° la distance de deux points connexes s'obtient, au signe près, en faisant la transformation dans l'expression de la distance des deux points primitifs; 2° on a une proposition analogue pour la distance d'un point à une droite; et 3° pour la tangente de l'angle de deux droites. 4° Les angles droits se conservent.*

Représentons par a', b', c', S′ ce que deviennent a, b, c, S par la transformation. Cherchons d'abord quelles valeurs doivent avoir A′, B′, C′ pour que, étant donnés deux points quelconques M_0, M_1, de distance d, la distance d' de leurs connexes barycentriques soit proportionnelle à la transformée d'' de la *valeur* de d; en un mot, pour qu'on ait $d'^2 = md''^2$. En posant $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ et

(8) $$u = \frac{\beta_1}{\sigma_1} - \frac{\beta_0}{\sigma_0}, \qquad v = \frac{\gamma_1}{\sigma_1} - \frac{\gamma_0}{\sigma_0},$$

on a, immédiatement :

(9) $$d^2 = c^2u^2 + b^2v^2 + 2bcuv \cos A,$$

(10) $$d'^2 = c^2u'^2 + b^2v'^2 + 2\, bcu'v' \cos A.$$

De (9), on déduit, par la transformation,

(11) $$d''^2 = c'u'^2 + b'^2v'^2 + 2b'c'u'v' \cos A'.$$

Afin qu'on ait $d'^2 = md''^2$ pour toute valeur de u et v, il faut et il suffit que

(12) $$m = \frac{c^2}{c'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{bc \cos A}{b'c' \cos A'}.$$

Ces rapports égalent $\frac{a^2}{a'^2}$, puisque $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

ce qui, en vertu du théorème fondamental entraîne

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos A'.$$

Les conditions deviennent donc

$$(13) \qquad \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{c^2}{c'^2}.$$

En dehors de la transformation de M. Lemoine (dans laquelle $d'^2 = d''^2$), ces formules (12) ne semblent pas correspondre à des transformations intéressantes. *(A suivre.)*

PROBLÈME DE PAPPUS (*)

Par M. **Frétille,** ancien élève de l'Ecole polytechnique, principal du Collège de Bône.

1. Lemme. — Étant données *(fig. 1)* une circonférence, deux tangentes fixes à cette circonférence OA et OB, et une tangente variable qui coupe OA et OB successivement en C et D, C_1 et D_1, C_2 et D_2, on a :

$$OA + OB = OC + OD + CD = OC_1 - OD_1 + C_1D_1 = OC_2 + OD_2 - C_2D_2$$

et réciproquement.

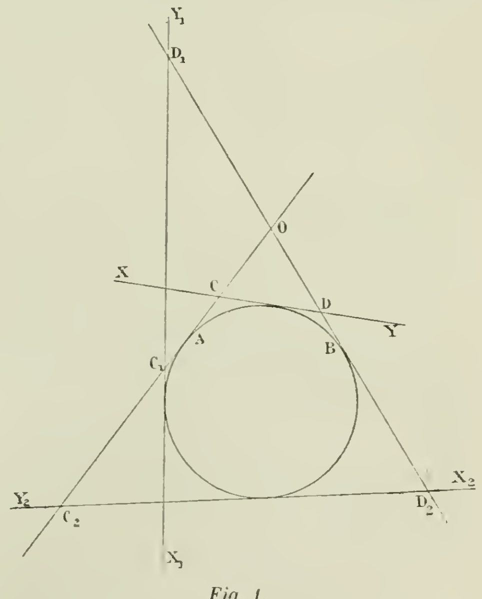


Fig. 1.

2. Solution. — Soient maintenant *(fig. 2)* A le point donné sur la bissectrice des

(*) Voyez, parmi les solutions récentes de ce problème, celles qui ont été données dans la *Géométrie analytique* de M. Pruvost, p. 18, et dans ce *Journal*, 1884, p. 13.

côtés de l'angle droit XOY, côtés que je prends pour axes; a la distance de A aux axes, l la longueur donnée, DAF la droite cherchée, x et y les distances OF, OD.

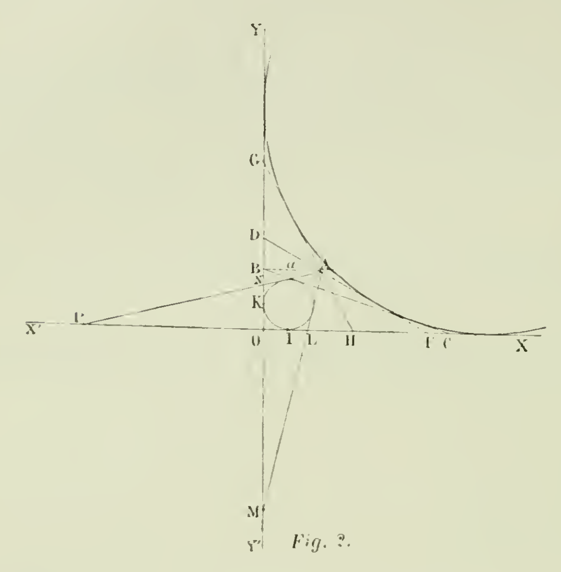


Fig. 2.

Les équations
$$a(x+y) = xy,$$
$$x^2 + y^2 = l^2,$$
donnent aisément : $x + y = a \pm \sqrt{a^2 + l^2}$,
$$xy = a(a \pm \sqrt{a^2 + l^2}).$$

Le radical ayant le même signe dans ces équations, il y a deux couples de solutions, et seulement deux. Séparons-les.

Premier couple :

(1) $$x + y = a + \sqrt{a^2 + l^2},$$
$$xy = a(a + \sqrt{a^2 + l^2});$$

x et y sont tous deux positifs, s'ils sont réels. L'équation (1) peut s'écrire :

$$x + y + l = a + l + \sqrt{a^2 + l^2}.$$

Le premier membre de cette équation représente le périmètre du triangle que forme, avec les axes, la droite cherchée. Le second membre représente le périmètre du triangle construit en prenant $OB = a$, $OC = l$, et en menant BC. Ces

deux triangle sont donc le même cercle ex-inscrit, d'où la construction suivante : Après avoir construit le triangle OBC, ex-inscrivez-y un cercle; puis, de A, menez deux tangentes à ce cercle : ce sont les droites cherchées.

Les deux solutions se confondent quand, par suite de la diminution de l, le cercle passe par A. Si l diminue encore, A devient intérieur au cercle, et le problème est impossible.

Le minimum de l est donc $2a\sqrt{2}$.

Second couple. — Le radical ayant le signe $-$, x et y sont de signes contraires. Cherchons la droite ALM pour laquelle x est positif et y négatif, et mettons les signes en évidence :

$$x - y = a - \sqrt{a^2 + l^2},$$

d'où :
$$x - y + l = a + l - \sqrt{a^2 + l^2},$$

ou :
$$\mathrm{OL} - \mathrm{OM} + \mathrm{LM} = \mathrm{OB} + \mathrm{OC} - \mathrm{BC}.$$

Le second membre de cette équation est aisé à construire ; il représente la somme des segments OI, OK, déterminés sur les axes par le cercle inscrit au triangle OBC.

Si d'ailleurs (réciproque du deuxième cas du lemme)

$$\mathrm{OL} - \mathrm{OM} + \mathrm{LM} = \mathrm{OI} + \mathrm{OK},$$

c'est que la droite ALM est tangente au même cercle. Donc les droites du second couple sont les tangentes menées, de A, au cercle inscrit.

Ce second couple est toujours réel. Car, puisque OB $= a$, BC passe entre A et O. A est donc extérieur au triangle OBC et, *a fortiori*, au cercle inscrit à ce triangle.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 113.)

229. — *Soient : θ l'angle de Brocard d'un triangle, φ l'angle déterminé par la relation*

$$tg\,\varphi = tg\,\mathrm{A} + tg\,\mathrm{B} + tg\,\mathrm{C};$$

vérifier les identités suivantes :

$$\sum \cos^4 \mathrm{A} = 1 + \frac{2(1 - \mathrm{tg}^2\,\varphi)}{(\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{cotg}\,\theta - 1)^2} = 1 + \frac{2\sin^2\theta\cos 2\varphi}{\sin^2(\varphi - \theta)},$$

$$\sum \sin^4 \mathrm{A} = \frac{2\mathrm{tg}^2\,\varphi(\mathrm{cotg}^2\,\theta - 1)}{(\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{cotg}\,\theta - 1)^2} = \frac{2\sin^2\varphi\cos 2\theta}{\sin^2(\varphi - \theta)},$$

$$\sum \cos 2A \sin^2 A = \frac{2 \,\mathrm{tg}\, \varphi (2 \,\mathrm{tg}\, \varphi - \mathrm{cotg}\, \theta + \mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}^2 \theta)}{(\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 1)^2},$$

$$\sum \cos 2A \cos^2 A = \frac{3 - 4 \,\mathrm{tg}^2 \varphi + \mathrm{tg}^2 \varphi \,\mathrm{cotg}^2 \theta}{(\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 1)^2},$$

$$\sum \sin A \sin (A - B) \sin (A - C) = \frac{\mathrm{tg}\, \varphi (\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 9)}{(\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 1)^2},$$

$$\sum \sin A \cos (A - B) \cos (A - C) = \frac{\mathrm{tg}\, \varphi (3 \,\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta + 5)}{(\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 1)^2},$$

$$\sum \cos A \sin (A - B) \sin (A - C) = \frac{\mathrm{tg}\, \varphi (3 \,\mathrm{cotg}\, \theta - 4 \,\mathrm{tg}\, \varphi + \mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}^2 \theta)}{(\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 1)^2},$$

$$\sum \cos A \cos (A - B) \cos (A - C) = \frac{4 \,\mathrm{tg}^2 \varphi - \mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 3}{(\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 1)^2},$$

$$1 - \sum \frac{\cos B \cos C}{\cos (B - C)} = \frac{\mathrm{tg}^2 \varphi - 2 - \mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta}{1 + 2 \,\mathrm{tg}^2 \varphi + \mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta},$$

$$\sum \cos^2 (B - C) = \frac{3 + 4 \,\mathrm{tg}^2 \varphi + \mathrm{tg}^2 \varphi \,\mathrm{cotg}^2 \theta}{(\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 1)^2},$$

$$\sum \sin^2 (B - C) = \frac{2 \,\mathrm{tg}\, \varphi (\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}^2 \theta - 3 \,\mathrm{cotg}\, \theta - 2 \,\mathrm{tg}\, \varphi)}{(\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 1)^2},$$

$$\sum \sin A \sin (A + \lambda) = \frac{2 \,\mathrm{tg}\, \varphi \sin \lambda (\mathrm{cotg}\, \lambda \,\mathrm{cotg}\, \theta + 1)}{\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 1},$$

$$\sum \sin A \sin (B + \lambda) \sin (C + \lambda) = \frac{\mathrm{tg}\, \varphi \sin^2 \lambda (3 \,\mathrm{cotg}^2 \lambda + 2 \,\mathrm{cotg}\, \lambda \,\mathrm{cotg}\, \theta + 1)}{\mathrm{tg}\, \varphi \,\mathrm{cotg}\, \theta - 1}.$$

195 (*). — x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, *étant les coordonnées normales de trois points :* M_1, M_2, M_3; *le lieu géométrique, quand* λ *varie, des points dont les coordonnées normales sont :*

$$\frac{x}{x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3} = \frac{y}{y_1 + \lambda y_2 + \lambda^2 y_3} = \frac{z}{z_1 + \lambda z_2 + \lambda^2 z_3},$$

est une conique tangente aux droites M_1M_2, M_2M_3, *la corde des contacts étant* M_1M_3.

L'élimination de λ entre les équations données, conduit à

$$\begin{aligned} &[(x_3y - y_3x)(x_2z - z_2x) - (x_2y - y_2x)(x_3z - z_3x)] \\ \times\ &[(x_2y - y_2x)(x_1z - z_1x) - (x_1y - y_1x)(x_2z - z_2x)] \\ =\ &[(x_3y - y_3x)(x_1z - z_1x) - (x_1y - y_1x)(x_3z - z_3x)]^2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2$$

196. — *Le centre de l'hyperbole de Kiepert, le milieu de* $\Omega\Omega'$, *et le centre du cercle des neuf points sont en ligne droite.*

(*) Nous rétabl ssons ici trois exercices qui auraient dû figurer après l'exercice 194 dans le numéro de novembre 1891 et qu'une erreur de mise en pages a fait oublier.

197. — *Distances du centre du cercle circonscrit, aux points du groupe de Nagel.*

On trouve :

$$O\nu'_a = R + 2r',$$
$$O\nu'_b = R + 2r'',$$
$$O\nu'_c = R + 2r'''.$$

On peut remarquer la relation

$$O\nu + O\nu'_a + O\nu'_b + O\nu'_c = 12\,R.$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(SESSION D'AVRIL 1892).

1. — 1° Étant donnés un cercle C, de rayon R, et deux tangentes PA, PB faisant entre elles un angle APB égal à α; calculer le rayon x d'un cercle tangent extérieurement au cercle C et touchant les droites PA.PB.

Examiner le cas particulier où $\alpha = 60°$. 2° Démontrer que des forces en nombre quelconque appliquées à un corps solide peuvent se réduire à 2 ; l'une d'elles passant par un point arbitrairement choisi sur le corps.

2. — 1° Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'expression

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x + 2}$$

est égale à une quantité donnée m? Combien y a-t-il de solutions? La quantité m a-t-elle un maximum ou un minimum?

2° Épure de la distance d'un point à un plan.

BIBLIOGRAPHIE

Premières leçons d'algèbre élémentaire. — Nombres positifs et négatifs. — Opérations sur les polynômes, par Henri PADÉ, ancien élève de l'École normale supérieure, professeur agrégé de l'Université; avec une préface de Jules TANNERY, sous-directeur des études scientifiques à l'École normale supérieure. — Librairie Gauthier-Villars et fils, un volume in-8°; 1892. — Prix : 2 fr. 50 c.

M. Padé s'est proposé de donner une nouvelle théorie des nombres négatifs. Quel reproche peut-on faire aux théories anciennes? Il est regrettable que l'auteur ne le dise pas. Certaines d'entre elles étaient rigoureuses et cependant plus courtes. D'après le nouveau système, il faudrait aux élèves un volume entier pour apprendre les quatre premières règles.

La définition des nombres positifs et négatifs (p. 5) nous semble trop générale. Voici cette définition : « Considérons la totalité des nombres, c'est-à-dire tous les nombres rationnels et irrationnels, et affectons chacun d'un indice, l'indice p; nous dirons alors de chacun d'eux qu'il est un nombre positif. » Le nombre négatif se définit de même, rien qu'en mettant l'indice n, ce qui ne nous apprend rien sur sa nature.

Les commençants se demandront peut-être pourquoi on se contente de deux indices, et à quelles grandeurs on compte appliquer ces nombres. Rien, dans les définitions, n'oblige ces grandeurs à appartenir à deux sens opposés et nous n'apercevons pas clairement l'utilité d'une telle généralité.

La table des matières reproduite ci-dessous donnera une idée de l'ensemble de cet ouvrage qui, nous devons le dire, a reçu, en dépit de la critique légère que nous croyons devoir lui faire ici, de hautes approbations.

TABLE DES MATIÈRES

Préface. Introduction. — Chapitre I. — **Les nombres positifs et négatifs.** — *Propositions empruntées à l'arithmétique.* Démonstration de quelques propositions relatives à l'addition et à la soustraction arithmétiques. — *Premières définitions.* Nombres positifs et négatifs, zéro. Valeur absolue, nombres égaux, inégaux, symétriques. — *Addition et soustraction.* Définition et notation. Sommes symétriques. Définition de la somme de plus de deux nombres. Elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les considère. On peut remplacer des termes par leur somme effectuée. Addition d'une somme. Propriété spéciale au nombre zéro. Différence de deux nombres. Notation. Conséquence pour la représentation d'un nombre et de son symétrique. Addition et soustraction d'une somme. Notation usuelle des nombres positifs et négatifs. Nombre plus grand, plus petit. Les nombres positifs nuls et négatifs forment une suite continue illimitée dans les deux sens. — *Multiplication et division.* Produit de deux nombres, notation. Produit de plus de deux nombres, propriétés. Notation des exposants. Propriété spéciale au nombre *un*. Quotient de deux nombres, notation. Propriétés des fractions algébriques. Remarque sur le symbole $\frac{a}{b}$, pour $b = 0$. — *Propriétés où interviennent à la fois les deux ordres d'opérations.* Multiplication des sommes, mises en facteur. Nouvelles propriétés des fractions algébriques. — *Représentations des grandeurs continues à deux sens inverses l'un de l'autre.* Mesure d'une grandeur quelconque. Grandeurs susceptibles de deux sens inverses, leur représentation pour les nombres positifs, nuls et négatifs. Nouvelles définitions de l'égalité et de la somme pour ces grandeurs; formules de Möbius. Théorème des projections. Généralisation. Correspondance univoque entre les points d'une droite et l'ensemble des nombres. Formule du mouvement uniforme — Chapitre II. — **Les polynômes.** *Définitions.* Expression algébriques, valeur numérique. Equivalence. Monôme, forme générale, monômes semblables. Polynôme, polynôme réduit, polynômes identiques, polynôme identiquement nul, degré. — *Applications aux polynômes des opérations fondamentales.* — Application aux polynômes des propriétés des sommes. Réduction de l'ensemble des polynômes. Introduction des polynômes ordonnés. Addition et soustraction des polynômes ordonnés. Multiplication de deux polynômes ordonnés, remarques. Multiplication de plus de deux polynômes ordonnés, possibilité d'intervertir l'ordre des facteurs et d'en remplacer par leur produit effectué. Division des polynômes ordonnés. Quotient, reste de la division. Décomposition d'un polynôme ordonné en facteurs du premier degré. Un polynôme ordonné équivalent à zéro est identiquement nul. Si deux polynômes ordonnés sont équivalents, ils sont identiques. Conséquences. Polynômes à un nombre quelconque de lettres. X.

QUESTION PROPOSÉE

427. — Le cercle de *Brocard* et le premier cercle de *Lemoine* sont concentriques. *(Brocard.)*

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11164-5-92.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, voir page 121.)

6. — *Les symétriques* W_a, W_b, W_c *de* W *relativement à* BC, CA, AB *sont respectivement les isogonaux de* A, B, C *relativement aux triangles* W'BC, W'CA, W'AB, *où* W' *est l'isogonal de* W. *Ils sont aussi les conjugués de* v', *relativement à ces triangles.*

Si A_2, B_2, C_2 sont les angles de W'BC, les angles de WBC sont $A - A_2$, $B - B_2$, $C - C_2$. Ceux de W_aBC sont donc $A_2 - A$, $B_2 - B$, $C_2 - C$. Et, par suite, W_a et A sont isogonaux relativement à W'BC.

En second lieu, W étant le conjugué de v'_a relativement à la circonférence vBC, son symétrique W_a, par rapport à BC, est le conjugué du symétrique v' de v'_a relativement à la circonférence symétrique de la circonférence vBC, c'est-à-dire relativement à la circonférence W'BC.

7. — On peut détacher de ce qui précède cette propriété curieuse et générale, qui n'emprunte à la géométrie du triangle que la notion des points isogonaux : *1° Si* v *est un point quelconque du plan du triangle* ABC, O_a *le centre du cercle* vBC, R_a *son rayon,* v' *l'isogonal de* v, v'_a *le symétrique de* v' *relativement à* BC, *les deux droites* Ov', $O'_a v'_a$ *se coupent en un point* W *tel que* $Ov'.OW = R^2$ *et* $O_a v'_a . O_a W = R_a^2$*; et la circonférence* WBC *divise* OO_a *harmoniquement.*

8.—*2° Les isogonaux* M', N' *de deux points* M, N *complémentaires relativement à un point* W *sont complémentaires relativement au point* v', *conjugué de* W*; le point directeur du nouveau système est l'isogonal* W' *de* W. *Et les points doubles sont les isogonaux des points doubles du système* W.

Les deux parties de la proposition sont évidentes. Il est à

remarquer qu'elle est la généralisation du théorème *que les isogonaux des deux points conjugués sont isoptiques*. Il suffit, pour obtenir ce cas particulier, de supposer W en O. Quelques mots d'explication sont nécessaires, concernant les points doubles de ce cas particulier. En général, si λ, μ, ν sont les coordonnées angulaires de W, celle des points doubles ω, ω_a, ω_b, ω_c, sont $\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}$ (choisis de façon que $\frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2} = 0$),

$$\frac{\lambda}{2},\ \frac{\pi}{2}+\frac{\mu}{2},\ \frac{\pi}{2}+\frac{\nu}{2};\qquad \frac{\pi}{2}+\frac{\lambda}{2},\ \frac{\mu}{2},\ \frac{\pi}{2}+\frac{\nu}{2};$$

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\lambda}{2},\ \frac{\pi}{2}+\frac{\mu}{2},\ \frac{\nu}{2}.$$

Quand W est en O, ces coordonnées deviennent

$$A, B, C;\qquad A,\ \frac{\pi}{2}+B,\ \frac{\pi}{2}+C;\qquad \frac{\pi}{2}+A,\ B,\ \frac{\pi}{2}+C;$$

$$\frac{\pi}{2}+A,\ \frac{\pi}{2}+B,\ C.$$

Les trois premières donnent un point arbitraire de circonférence ABC, dont l'isogonal est un point quelconque à l'infini. Les trois suivantes donnent le point A considéré comme situé à l'extrémité du diamètre AS. dès lors, il a pour isogonal H_a. Et de même les trois suivantes donnent le point B, extrémité du diamètre de BS', l'isogonal est H_b. Et de même pour les trois dernières.

Corollaire. — *Si* W *et* v' *sont deux points conjugués quelconques,* W', v *leurs isogonaux (qui sont isoptiques);* ρ_1 *désignant le rayon du cercle circonscrit aux podaires de* W *et* W', *et* ρ *celui des podaires de* v *et* v', *on a* $vW.v'W' = L\rho.\rho_1$.

En effet, dans le système des points complémentaires relativement à W, on a (5) $\frac{AW}{Av'} = \frac{vW}{2\rho}$, et dans le système v' $\frac{Av'}{AW} = \frac{v'W'}{2\rho_1}$. Donc $vW.v'W' = 4\rho.\rho_1$. Si W_a et v'_a sont les symétriques de W et v' relativement à BC, $2\rho = vv'_a$ et $2\rho_1 = W'W_a$. La relation peut donc s'écrire

$$vW.v'W' = vv'_a.W'W_a.$$

14° Nous terminerons par la généralisation de la seconde

forme du théorème préliminaire relatif aux points isoptiques (§ XXII *bis*).

Théorème. — m, m′ *étant deux points isogonaux quelconques, leurs transformés* M, M′ *relativement à un triangle* EBC *où* E *est arbitraire et dont les angles* α, β, γ *sont, dans ce triangle, complémentaires relativement au point qui aurait pour coordonnées angulaires, relatives à* EBC, $2\alpha - A$, $2\beta - B$, $2\gamma - C$.

Car les angles des triangles *m*BC, *m′*BC ayant, par hypothèse, pour sommes A, B, C, les coordonnées angulaires de M et M′ relativement à EBC ont pour sommes $2\alpha - A$, $2\beta - B$, $2\gamma - C$.

On retrouve le cas particulier des points isoptiques en faisant $2\alpha = A$, $2\beta = B$, $2\gamma = C$, c'est-à-dire en prenant pour E l'un quelconque des centres des cercles tangents aux côtés de ABC. Si l'on prend pour E l'un des neuf points définis par $3\alpha = A$, $3\beta = B$, $3\gamma = C$, les points M, M′ seront complémentaires relativement à l'orthocentre de EBC.

NOTE COMPLÉMENTAIRE SUR LES POINTS ISOPTIQUES

Dans l'exposé de la transformation de M. Schoute, fait dans ce journal par M. Vigarié, la seconde construction des points jumeaux ou isoptiques (rectifiée J.E., novembre 1891, p. 256), revient à ce théorème : *Lorsque deux points* M_1, N_1, *sont isogonaux relativement au triangle* $H_aH_bH_c$, *les inverses* M, N *de ces deux points relativement à l'orthocentre* H *pris pour pôle, avec une puissance d'inversion égale en grandeur et signe à* $HA.HH_a$, *sont isoptiques.*

Ce théorème peut être généralisé comme il suit et démontré par la seule considération des angles définis à $k\pi$ près.

Théorème. — *Si, prenant pour pôle d'inversion un point arbitraire* v *du plan et une puissance d'inversion arbitraire* ϖ, *positive ou négative, on construit un triangle* $A_1B_1C_1$ *inverse du triangle* ABC, *et que* M_1, N_1 *soient deux points isogonaux relativement à ce triangle, les inverses* M, N *de* M_1, N_1 *sont complémentaires relativement au point* W *qui est, relativement à* ABC, *le conjugué de l'isogonal de* v. *Si* v *est en* H, M, N *sont isoptiques.*

Lemme. — *M et M_1 étant deux points inverses relativement à* v, α, β, γ *les coordonnées angulaires de* M *relativement à* ABC, α_1, β_1, γ_1 *celles de* M_1 *relativement à* $A_1B_1C_1$, *et* λ, μ, ν *celles de* v *qui sont les mêmes pour* ABC *et* $A_1B_1C_1$, *on a* $\alpha + \alpha_1 = \lambda$, $\beta + \beta_1 = \mu$, $\gamma + \gamma_1 = \nu$.

De l'égalité $$vB.vB_1 = vM.vM_1$$
il suit que BB_1MM_1 est inscriptible et $(MB.MM_1) = (B_1B.B_1M_1)$. Pour la même raison
$$(MC.MM_1) = (C_1C.C_1M_1).$$
D'où par différence
$$(MB.MC) = (B_1B.C_1C) - (M_1B_1.M_1C_1),$$
ou $$\alpha + \alpha_1 = (B_1B.C_1C) = (vB.vC) = \lambda.$$
Ainsi $$\alpha + \alpha_1 = \lambda,\ \beta + \beta_1 = \mu,\ \gamma + \gamma_1 = \nu.$$

Remarque. — En appliquant ce lemme aux points inverses A et A_1, B et B_1, C et C_1 et en désignant par A_1, B_1, C_1, les angles du triangle $A_1B_1C_1$, on a $A + A_1 = \lambda$, $B + B_1 = \mu$, $C + C_1 = \gamma$.

Revenons au théorème, et appelons α', β', γ' les coordonnées angulaires de N relativement à ABC, α'_1, β'_1, γ'_1 celles de N relativement à $A_1B_1C_1$. D'après le lemme $\alpha + \alpha_1 = \lambda$ et $\alpha' + \alpha'_1 = \lambda$. Donc $(\alpha + \alpha') + (\alpha_1 + \alpha'_1) = 2\lambda$, etc. Si donc M_1, N_1 sont isogonaux relativement à $A_1B_1C_1$, comme alors $\alpha_1 + \alpha'_1 = A_1 = \lambda - A$, il en résulte $\alpha + \alpha_1 = \lambda + A$ et de même $\beta + \beta' = \mu + B$, $\gamma + \gamma' = \nu + C$. Mais $\lambda + A$, $\mu + B$, $\nu + C$ sont les coordonnées angulaires relativement à ABC du point W, conjugué de l'isogonal de v. Donc M et N sont, dans ABC, complémentaires relativement à W. Le point directeur du système est le pôle d'inversion v.

Quand v est en H, λ, μ, ν étant égaux à $-A$, $-B$, $-C$, on a $\alpha + \alpha' = 0$, $\beta + \beta' = 0$, $\gamma + \gamma' = 0$, les points M, N sont isoptiques. Ou bien encore v étant en H, son isogonal est en O, et le conjugué de cet isogonal W est à l'infini ; M, N complémentaires relativement à un point à l'infini sont isoptiques.

Propriété. — *L'inverse* W_1 *du point* W *coïncide avec l'isogonal de* v *relativement à* $A_1B_1C_1$.

Car les coordonnées angulaires de W dans ABC étant $A + \lambda$, $B + \mu$, $C + \nu$, celles de son inverse W_1 sont, relativement

à $A_1B_1C_1$ $-A$, $-B$, $-C$ ou $A_1-\lambda$, $B_1-\mu$, $C_1-\nu$, donc W_1 est l'isogonal de v relativement à $A_1B_1C_1$.

De là *Nouvelle démonstration du théorème que deux points* M, N *complémentaires relativement à* W *dans* ABC, *sont aussi complémentaires relativement à* W *dans chacun des triangles* vBC, vCA, vAB.

Il suffit d'établir que la somme des angles sous lesquels de M et N on voit l'une quelconque des droites Av, Bv, Cv est égale à l'angle sous lequel la même droite est vue de W.

Le quadrilatère inscriptible AA_1MM_1 donne

$$(MA.Mv) = (A_1v_1.A_1M_1),$$

et de même

$$(NA.Nv) = (A_1v.A_1N_1).$$

D'où en appelant Δ l'une des bissectrices de l'angle $M_1A_1N_1$ $(MA.Mv)+(NA.Nv) = 2(A_1v, \Delta)$. Or puisque M_1, N_1 sont supposés isogonaux dans $A_1B_1C_1$, Δ est aussi bissectrice de l'angle $B_1A_1C_1$, et comme l'isogonal de v dans $A_1B_1C_1$, est W_1, $2(A_1v.\Delta) = (A_1v.A_1W_1)$. Mais dans le quadrilatère inscriptible AA_1WW_1 $(A_1v.A_1W_1) = (WA.Wv)$. Donc, ainsi qu'il s'agissait de le démontrer $(MA.Mv)+(NA.Nv) = (WA.Wv)$. On prouverait comme plus haut que A, B, C, so t les points directeurs, relativement à vBC, vCA, vAB.

Problème. — *Etant donné un point* M, *construire le point* N *complémentaire du premier relativement à un point donné* W *et construire les points* ω, ω_a, ω_b, ω_c *qui sont leurs propres complémentaires.*

Ayant construit v et par suite A_1 B_1 C_1, on prend l'inverse M_1 de M, l'isogonal N_1 de M_1 relativement à $A_1B_1C_1$, et le point cherché N est l'inverse de N_1.

Quand M est en un des points doubles ω, N y est aussi. Donc M_1 et N_1 coincident. De sorte que les quatre points doubles sont les inverses des quatre cercles tangents aux côtés de $A_1B_1C_1$. Si ω', ω'_a sont deux de ces centres en ligne droite avec A_1, leurs inverses ω, ω_a sont sur une même circonférence avec v et A', et de même ω_b, ω_c, et ces deux circonférences sont orthogonales puisque les deux droites $A_1\omega'\omega'_a$, $A_1\omega'_b\omega'_c$ le sont. Comme ω' et ω'_a sont sur une même circonférence B_1C_1, ainsi que ω'_b et ω'_c et que ces quatre circonférences sont orthogonales

entre elles et respectivement orthogonales aux droites $A_1\omega'\omega'_a$, $A_1\omega'_b\omega'_c$, de même ω, ω_a seront sur une même circonférence avec BC, ainsi que ω_b et ω_c et ces circonférences seront orthogonales entre elles et respectivement orthogonales aux circonférences $Av\omega\omega_a$, $Av\omega_b\omega_c$.

Dans le cas où v est en H, et où A_1, B_1, C_1 sont en H_a, H_b, H_c, les centres des quatre cercles tangents aux côtés de $H_aH_b H_c$ sont A, B, C; les quatre points qui sont leurs propres isoptiques sont donc un point à l'infini et les points H_a, H_b, H_c.

D'une manière générale, le théorème permet de transformer toute propriété relative aux points isogonaux M_1, N_1 en une propriété relative aux points complémentaires M, N, et comme cas particulier, aux points isoptiques, et réciproque ment. Nous nous bornerons à un exemple qui vise la propriété la plus remarquable. Admettant le théorème sur le lieu du centre de tout couple isoptique, qui est le cercle $H_aH_bH_c$, nous voyons qu'il en résulte par inversion que *le lieu du point harmoniquement opposé au centre de l'un des quatre cercles tangents aux côtés d'un triangle relativement à tout couple isogonal de ce triangle est le cercle qui passe par les trois autres centres*; et de là, par une nouvelle inversion, nous concluons que *dans un système de points complémentaires, le lieu du point harmoniquement opposé à l'un des quatre points doubles relativement à tout couple de points complémentaires, est le cercle qui passe par les trois autres points doubles.*

La démonstration qui a été donnée du théorème et qui repose sur l'égalité $(\alpha + \alpha') + (\alpha_1 + \alpha'_1) = 2\lambda$, et deux autres pareilles, conduit à un théorème plus général.

Théorème. — *Si* M_1, N_1 *sont complémentaires relativement à un point* U_1 *dans* $A_1 B_1 C_1$, *leurs inverses* M, N *sont complémentaires relativement à un certain point* U *dans le triangle* ABC, *et les points directeurs* u_1, u *des deux systèmes sont inverses l'un de l'autre. Quand* U_1 *est en* v, *il en est de même de* U.

Soient l_1, m_1, n_1 les coordonnées angulaires de U_1 dans $A_1B_1C_1$. On a $\alpha_1 + \alpha'_1 = l_1$, $\beta_1 + \beta'_1 = m_1$, $\gamma_1 + \gamma'_1 = n_1$. Et par suite $\alpha + \alpha' = 2\lambda - l_1$, $\beta + \beta' = 2\mu - m_1$, $\gamma + \gamma' = 2\nu - n_1$. Donc M, N sont complémentaires relativement à un point U, dont les coordonnées angulaires l, m, n, relatives à ABC, sont don-

nées par $l + l_1 = 2\lambda$, $m + m_1 = 2\mu$, $n + n_1 = 2\nu$. Le point directeur u_1 du système U_1 étant l'isogonal du conjugué de U_1 dans $A_1B_1C_1$, ses coordonnées dans ce triangle sont $l_1 - A_1$, $m_1 - B_1$, $n_1 - C_1$. Et dans ABC, celles du point directeur u sont $l - A$, $m - B$, $n - C$. Les coordonnées de u_1 et u ayant pour somme λ, μ, ν, les points u_1 et u sont inverses l'un de l'autre. Quand U_1 est en v, l_1, m_1, n_1, sont égaux à λ, μ, ν; donc l_1m_1n sont aussi égaux à $\lambda_1\mu_1\nu$ et U coïncide également avec v.

Il est clair que les points doubles ω, ω_a, ω_b, ω_c du système U sont les inverses des points doubles ω', ω'_a, ω'_b, ω'_c du système U_1 car lorsque M_1 et N_1 coïncident, leurs inverses M, N coïncident aussi.

Cas particulier — *Si* M_1, N_1 *sont conjugués relativement à* $A_1B_1C_1$, *leurs inverses* M, N *sont conjugués dans* ABC.

Par hypothèse $\alpha_1 + \alpha'_1 = 2A_1$, $\beta_1 + \beta'_1 = 2B_1$, $\gamma_1 + \gamma'_1 = 2C_1$. Donc $\alpha + \alpha' = 2\lambda - 2A_1 = 2A$, $\beta + \beta' = 2B$, $\gamma + \gamma' = 2C$.

Ou encore le point directeur u_1 étant alors sur la circonférence $A_1B_1C_1$, le point directeur u est sur la circonférence ABC qui est l'inverse de la première, et par suite, le système U est formé de points conjugués.

Remarque. — On peut prendre pour A_1, B_1, C_1 les points où Av, Bv, Cv rencontrent la circonférence ABC. Dans ce cas, on voit que si l'un des systèmes u, u_1, et par suite aussi l'autre, sont formés de points conjugués, ils se trouvent conjugués relativement au même cercle ABC. *(A suivre.)*

TRANSFORMATION DES FORMULES DES TRIANGLES

Par M. **A. Poulain**, à Angers.

(*Suite et fin*, voir p. 110.)

12. — Un raisonnement analogue conduit à la formule donnant la distance d'un point à une droite. On part de la formule

$$(14)\quad d = \frac{2S(l\alpha + m\beta + n\gamma)}{\pm \sigma\sqrt{b^2(l-m)^2 + c^2(n-l)^2 + 2bc(l-m)(n-l)\cos A}}.$$

La transformation de M. Lemoine donne encore $d'^2 = d''^2$.

13. — De même, pour l'angle V de deux droites, on part de la formule

$$(15)\qquad \operatorname{tg} V = \frac{2S \begin{vmatrix} 1 & l & l_1 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\Sigma a^2 ll_1 - \Sigma bc(mn_1 + nm_1)\cos A}}.$$

On retrouve les conditions (12). Pour la transformation de M. Lemoine, $\operatorname{tg} V = \pm \operatorname{tg} V''$ et les angles droits se conservent.

14. — Toutefois, *quand il s'agit de connexes barycentriques et qu'on veut savoir ce que devient, même au point de vue du signe, le rapport de deux segments* situés sur la même droite ou sur des droites parallèles, *il suffit de faire la transformation dans l'expression qui donne ce rapport.*

Car soient d, D deux segments parallèles ; y_0, y_1 les coordonnés normales absolues des extrémités du premier segment; V l'angle des deux droites avec CA.

On a

$$(16)\qquad d \sin V = y_1 - y_0 = \frac{2S}{b} u \quad , \quad D \sin V = \frac{2S}{b} U.$$

D'où

$$(17)\qquad \frac{d}{D} = \frac{u}{U}; \text{ et, de même, } (18)\ \frac{d'}{D'} = \frac{u'}{U'}.$$

Mais, de (17) la transformation connexe déduit

$$(19)\qquad \frac{d''}{D''} = \frac{u'}{U'}, \quad \text{d'où} \quad (20)\ \frac{d}{D} = \frac{d''}{D''}.$$

Il suit de là que, *pour tous les connexes barycentriques : 1° les valeurs des nouveaux rapports anharmoniques de points, et par là même de droites, se déduisent des anciens au moyen de la transformation; 2° l'involution se conserve*, puisque le point central donnait un produit de deux rapports qui égalait l'unité et que cette valeur se conserve.

15. — De la définition des points *connexes barycentriques*, on peut déduire la transformation à faire subir à leurs autres coordonnées. *Si les coordonnées normales relatives sont*

$$(21)\qquad x : y : z = F_1(A, B, C) : \ldots,$$

il faut remplacer les valeurs $F_1(A, B, C)$, .. *par leurs transfor-*

mées $F_1(A', B', C'), \ldots$; *seulement* x, y, z *doivent l'être par* $\frac{ax'}{a'}$, $\frac{by'}{b'}$, $\frac{cz}{c'}$.

En effet, les relations (21) peuvent s'écrire

(22) $$ax : by : cz = aF_1(A, B, C) : \ldots,$$

ou

(23) $$\alpha : \beta : \gamma = aF_1(A, B, C) : \ldots$$

Donc, d'après la définition de $\alpha', \ldots$ ces relations se transforment en

(24) $$\alpha' : \beta' : \gamma' = a'F_1(A', B', C') : \ldots,$$

ou

(25) $$ax' : by' : cz' = a'F_1(A', B', C') : \ldots$$

16. — On verrait de même que si la courbe est donnée en coordonnées normales, il faut pour avoir sa connexe barycentrique, opérer sur x, y, z suivant la règle précédente.

Pour d'autres systèmes de coordonnées, il est facile d'obtenir les nouvelles valeurs, mais il n'arrivera pas toujours qu'elles se déduisent des anciennes par des règles aussi simples que les précédentes.

PROBLÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE

Par M. **L. Bénézech.**

---

1. — *Étant données les coordonnées quadripolaires* $(\lambda'_1\lambda'_2\lambda'_3\lambda'_4)$ $(\lambda''_1\lambda''_2\lambda''_3\lambda''_4)$ *de deux points* M'M", *par rapport au tétraèdre de référence* $A_1A_2A_3A_4$; *trouver l'équation barycentrique d'un plan* Q *perpendiculaire à la droite qui joint ces points.*

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les coordonnées barycentriques d'un point quelconque M du plan. On peut écrire, d'après une formule fondamentale de la théorie du centre des distances proportionnelles (Voir *J. E.*, 1890, p. 145), les deux équations

$$\sum \alpha_1\lambda_1'^2 = \sum \alpha_1\overline{MA}_1^2 + \left(\sum \alpha_1\right)\overline{MM'}^2.$$

$$\sum \alpha_1 \lambda_1''^2 = \sum \alpha_1 \overline{MA}_1^2 + \left(\sum \alpha_1\right) \overline{MM''}^2 ;$$

d'où, en retranchant,

$$\sum \alpha_1 (\lambda_1'^2 - \lambda_1''^2) = \left(\sum \alpha_1\right) (\overline{MM'}^2 - \overline{MM''}^2).$$

Or, si l'on appelle ω le milieu du segment $M'M''$ et q le point où la droite $M'M''$ perce le plan Q, on a, en tenant compte des signes,

$$\overline{MM'}^2 - \overline{MM''}^2 = \overline{M'q}^2 - \overline{M''q}^2 = 2\overline{M'M''}.\overline{\omega q}.$$

L'équation précédente devient donc

$$\sum \alpha_1 (\lambda_1'^2 - \lambda_1''^2) = 2\left(\sum \alpha_1\right) \overline{M'M''}.\overline{\omega q}.$$

C'est, évidemment, l'équation cherchée. Elle est de la forme

$$\sum \alpha_1 (\lambda'^2 - \lambda_1''^2) = k \sum \alpha_1.$$

Autre solution. — Si p_1, p_2, p_3, p_4, ρ représentent les distances algébriques des sommets du tétraèdre de référence et du plan Q au plan mené par ω, perpendiculairement à $M'M''$, on a, d'après une autre formule connue, pour tout point $M(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ du plan Q,

$$\sum \alpha_1 p_1 = \rho \sum \alpha_1$$

ou bien, à cause des égalités

$$\lambda_1'^2 - \lambda_1''^2 = 2M'M''.p_1, \quad \lambda_1'^2 - \lambda_2''^2 = 2M'M''.p_2, \text{ etc.},$$

$$\sum \alpha_1 (\lambda_1'^2 - \lambda_1''^2) = 2\left(\sum \alpha_1\right) \overline{M'M''}.\overline{\omega q},$$

équation demandée.

Remarque. — Il est à peine besoin d'ajouter qu'on résout, d'une façon identique, le problème analogue, de la Géométrie du triangle : *trouver l'équation barycentrique d'une droite, connaissant les coordonnées tripolaires de deux points d'une autre droite, perpendiculaire à la première* (*).

2. — *Étant données les coordonnées barycentriques absolues* $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4')(\alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3'', \alpha_4'')$ *des centres* O', O'' *de deux sphères, de rayons* ρ', ρ''; *déterminer les coordonnées barycentriques de leurs centres d'homothétie.*

(*) C'est la question proposée dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, sous le n° 338, par M. Poulain.

1° *Centre d'homothétie directe.* — Considérons un plan quelconque passant par deux points homologues M′, M″ des deux sphères, par rapport au centre d'homothétie considéré.

Soient p_1, p_2, p_3, p_4 les longueurs algébriques des projetantes parallèles aux rayons homologues O′M′, O″M″ des sommets A_1, A_2, A_3, A_4 du tétraèdre de référence.

D'après une propriété connue, relatif au centre des distances proportionnelles, on peut écrire les relations :

$$\alpha_1' p_1 + \alpha_2' p_2 + \alpha_3' p_3 + \alpha_4' p_4 = V\rho',$$
$$\alpha_1'' p_1 + \alpha_2'' p_2 + \alpha_3'' p_3 + \alpha_4'' p_4 = V\rho'',$$

V désignant le volume du tétraèdre de référence. D'où :

$$(\alpha_1'\rho'' - \alpha_1''\rho')p_1 + (\alpha_2'\rho'' - \alpha_2''\rho')p_2 + (\alpha_3'\rho'' - \alpha_3''\rho')p_3 + (\alpha_4'\rho'' - \alpha_4''\rho')p_4 = 0.$$

Or, comme on a, pour tout point $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ du plan considéré,

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4 = 0;$$

la relation précédente montre que le point, dont les coordonnées barycentriques sont :

$$(\alpha_1'\rho'' - \alpha_1''\rho'), \quad (\alpha_2'\rho'' - \alpha_2''\rho'), \quad (\alpha_3'\rho'' - \alpha_3''\rho'), \quad (\alpha_4'\rho'' - \alpha_4''\rho')$$

est sur le plan. De même ce point se trouve sur les autres plans passant par deux points homologues des deux sphères par rapport au centre d'homothétie directe; il coïncide donc avec ce centre d'homothétie.

2° On démontre, d'une façon analogue, que les coordonnées barycentriques du centre d'homothétie inverse sont :

$$(\alpha'\rho'' + \alpha\rho_1''{}'), \quad (\alpha_2'\rho'' + \alpha_2''\rho') \; \ldots \; ;$$

car, dans ce cas, des deux relations :

$$\alpha_1' p_1 + \alpha_2' p_2 + \alpha_3' p_3 + \alpha_4' p_4 = V\rho',$$
$$\alpha_1'' p_1 + \alpha_2'' p_2 + \alpha_3'' p_3 + \alpha_4'' p_4 = -V\rho'',$$

on tire $$(\alpha_1'\rho'' + \alpha_1''\rho') + \ldots = 0.$$

Application. — Il est bien évident qu'on a des formules semblables pour la Géométrie du triangle. Déterminons, par exemple, les coordonnées barycentriques des centres de similitude, externe et interne, S′, S″, du cercle inscrit et du cercle circonscrit au triangle de référence ABC.

Les coordonnées de S′ sont

$$\left(\frac{1}{2}\,arR - \frac{1}{2}\,aRr\cos A\right),\quad \left(\frac{1}{2}\,brR - \frac{1}{2}\,bRr\cos B\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}\,crR - \frac{1}{2}\,cRr\cos C\right);$$

ou bien : $a(1 - \cos A)$, $b(1 - \cos B)$, $c(1 - \cos C)$;

$$a\sin^2\frac{A}{2},\qquad b\sin^2\frac{B}{2},\qquad c\sin^2\frac{C}{2}.$$

Les coordonnées de S″ sont :

$$a(1 + \cos A),\qquad b(1 + \cos B),\qquad c(1 + \cos C),$$

ou $$a\cos^2\frac{A}{2},\qquad b\cos^2\frac{B}{2},\qquad c\cos^2\frac{C}{2}.$$

On trouve, également, que les coordonnées barycentriques des centres de similitude externe et interne S'_a, S''_a des cercles circonscrit et ex-inscrit dans l'angle A au triangle ABC sont :

$$S'_a \ldots -a\cos^2\frac{A}{2},\qquad b\sin^2\frac{B}{2},\qquad c\sin^2\frac{C}{2},$$

$$S''_a \ldots -a\sin^2\frac{A}{2},\qquad b\cos^2\frac{B}{2},\qquad c\cos^2\frac{C}{2}.$$

EXERCICES ÉCRITS

Par M. **A. Boutin.**

---

230. — *On considère un point* M *du plan d'un triangle* ABC ; *les droites* AM, BM, CM, *rencontrent la circonférence circonscrite en* A_1, B_1, C_1. *On projette* A_1 *en* a_1 *sur* BC, C_1 *en* c_1 *sur* AB, B_1 *en* b_1 *sur* AC. *Déterminer le lieu de* M, *de manière que les droites* Aa_1, Bb_1, Cc_1 *soient concourantes.*

Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées normales de M. A_1 étant à l'intersection de AM, et du cercle circonscrit, on a

$$\frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = -\frac{x(bz + cy_1)}{ay_1z_1}.$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée de A_1 sur BC est :

$$z_1\cos C - y_1\cos B)(bz_1 + cy_1)x + bz_1(z_1 + y_1\cos A)y - cy_1(y_1 + z_1\cos A)z = 0,$$

d'où pour l'équation de Aa_1,

$$\frac{y}{z} = \frac{cy_1(y_1 + z_1 \cos A)}{bz_1(z_1 + y_1 \cos A)}.$$

La condition de concours des trois droites analogues est :

$$\frac{(y_1 + z_1 \cos A)(z_1 + x_1 \cos B)(x_1 + y_1 \cos C)}{(z_1 + y_1 \cos A)(x_1 + z_1 \cos B)(y_1 + x_1 \cos C)} = 1,$$

ou, en supprimant les indices

$$\Sigma x(y^2 - z^2)(\cos A - \cos B \cos C) = 0.$$

Cette équation représente la cubique des inverses, relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre.

235. (*) — A, B, C, *étant les angles d'un triangle, on a*

$$\sin A \ \sin B \ \sin C \ \Sigma \cos^2 A = \cos A \ \cos B \ \cos C \ \Sigma \frac{\sin^3 A}{\cos A}.$$

236. — *Sommer la suite :*

$$S = 1^2.2^2 + 2^2.3^2 + 3^2.4^2 + \ldots + n^2(n+1)^2.$$

On trouve aisément :

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{15}(3n^2 + 6n + 1).$$

237. — *Soient* M *un point,* $A_1B_1C_1$ *son triangle pédal; le cercle circonscrit à* $A_1B_1C_1$ *coupe chacun des côtés du triangle de référence en un second point* $A_2B_2C_2$ *tels que les droites* AA_2, BB_2, CC_2, *sont concourantes.*

Le cercle

$$\Sigma a^2\beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma)(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) = 0$$

passant par A_1, B_1, C_1, on a :

$$a^2\beta_1\gamma_1 - (\beta_1 + \gamma_1)(\mu\beta_1 + \nu\gamma_1) = 0$$
$$\beta^2\alpha_1\gamma_1 - (\alpha_1 + \gamma_1)(\lambda\alpha_1 + \nu\gamma_1) = 0$$
$$c^2\alpha_1\beta_1 - (\alpha_1 + \beta_1)(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) = 0;$$

$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ étant les coordonnées barycentriques de M, on en tire :

$$\lambda = \frac{1}{2\alpha_2}\left(\frac{b^2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\gamma_1}} + \frac{c^2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}} - \frac{a^2}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1}}\right)$$

deux équations analogues pour μ et ν.

Il en résulte que si on pose, pour abréger,

$$\lambda = \frac{A}{2\alpha_1}, \qquad \mu = \frac{B}{2\beta_1}, \qquad \nu = \frac{C}{2\gamma_1},$$

(*) Les questions 231-234 sont publiées dans le numéro du *J. S.* de ce mois.

l'équation de AA_1 est

$$\beta B = \gamma C,$$

et les droites AA_1, BB_1 concourent au même point

$$\alpha A = \beta B = \gamma C,$$

qui est le réciproque de l'anticomplémentaire du point

$$\frac{\alpha(\beta_1 + \gamma_1)}{a^2\beta_1\gamma_1} = \frac{\beta(\alpha_1 + \gamma_1)}{b^2\alpha_1\gamma_1} = \frac{\gamma(\alpha_1 + \beta_1)}{c^2\alpha_1\beta_1}.$$

238. — *Dans un triangle, on considère un point* M, *son triangle podaire* A'B'C'; *par* A', *on mène une parallèle à* AB, *par* B' *une parallèle à* BC, *par* C' *une parallèle à* AC. *Déterminer le lieu de* M, *de manière que ces parallèles soient concourantes. Même question si, par* A', *on mène une parallèle à* AC; *par* B', *une parallèle à* AB; *par* C', *une parallèle à* BC.

Soient x', y', z', les coordonnées normales de M, les équations des parallèles considérées sont :

$$z = z' + x' \cos B,$$
$$y = y' + z' \cos A,$$
$$x = x' + y' \cos C,$$

Pour qu'elles concourent il faut :

$$ax + by + cz = 2S$$

d'où $$c \cos B \; x' + a \cos C \; y' + b \cos A \; z' = 0.$$

et dans le second cas

$$b \cos C \; x' + c \cos A \; y' + a \cos B \; z' = 0$$

On peut remarquer que ces lieux sont deux droites arallèles entre elles et au diamètre de Brocard OK, si on cherche la distance de O à chacune d'elles, on constate que ces droites sont symétriques par rapport à O et par suite à égale distance de OK.

Si on cherche les lieux des points de rencontre des parallèles, on a :

$$x' = x - y \cos C + z \cos A \cos C,$$
$$y' = y - z \cos A + x \cos A \cos B,$$
$$z' = z - x \cos B + y \cos B \cos C,$$

d'où, en coordonnées barycentriques :

$$\alpha \operatorname{cotg} B + \beta \operatorname{cotg} C + \gamma \operatorname{cotg} A = 0.$$

On aurait de même dans le second cas

$$\alpha \operatorname{cotg} C + \beta \operatorname{cotg} A + \gamma \operatorname{cotg} B = 0.$$

239. — *On considère un triangle équilatéral* ABC; *par un point* M *de la circonférence circonscrite on mène des parallèles aux côtés. Ces parallèles rencontrent les côtés en six points qui sont trois à trois sur deux droites. L'angle de ces deux droites est de* 60° *quel que soit* M.

Soit a le côté du triangle, x_1, y_1, les coordonnées de M, les axes étant deux des côtés du triangle. On a :

(1) $$x_1^2 + y_1^2 + x_1y_1 - ax_1 - ay_1 = 0.$$

Soient DE, HF les parallèles aux axes menées par M. Les équations de DF, EH, sont :

$$\frac{y - y_1}{- y_1} = \frac{x - a + y}{x_1 + y_1 - a},$$

$$\frac{y - y_1}{a - x_1 - y_1} = \frac{x}{x_1}.$$

On constate qu'elles passent par les pieds de la parallèle par M au troisième côté.

L'angle V de ces droites est :

$$\operatorname{tg} V = \frac{\sin \theta (m - m_1)}{1 + mm_1 + (m + m_1) \cos \theta},$$

où $\theta = 60°$.

$$m = - \frac{x_1 + y_1 - a}{x_1} \qquad m_1 = - \frac{y_1}{x_1 + y_1 - a}.$$

Si, en outre, on tient compte de (1). Il reste, tous calculs faits :

$$\operatorname{tg} V = \sqrt{3}, \qquad V = 60°. \quad (*)$$

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

(CONCOURS DE 1892)

Mathématiques (2 heures un quart).

I. — On donne un triangle ABC rectangle en A et les perpendiculaires en B et C au plan de ce triangle. Trouver, sur ces perpendiculaires, d'un même côté du plan ABC les points B′ et C′ tels que l'angle BAC′ soit égal à un angle donné α et que l'air du triangle B′AC′ ait une valeur donnée K^2.

II. — On prend sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle donné ABC les points D, E, F tels qu'on ait

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{1}{k}.$$

1° Évaluer, en fonction de l'aire du triangle ABC et du rapport donné K

(*) On peut observer que si P est le point de concours des deux droites précédentes ; les coordonnées de P sont :

$$x = \frac{x_1^2}{a}, \qquad y = \frac{y_1^2}{a},$$

ce qui donne pour le lieu de P une hypocycloïde à trois rebroussements. Les enveloppes des droites précédentes sont également des hypocycloïdes à trois rebroussements.

Par projection, le triangle équilatéral devient quelconque, la circonférence circonscrite devient l'ellipse de Steiner, les six points de l'énoncé ne cessent pas d'être sur deux droites, mais l'angle de ces droites n'est plus constant. Le lieu du point d'intersection et les enveloppes des droites précédentes sont des quartiques.

les aires des triangles AFE, BDF, CED et DEF, puis suivre la variation de l'aire de ce triangle DEF, lorsque k varie.

2° En supposant toujours que k varie, trouver le lieu géométrique décrit par le milieu de chaque côté du triangle DEF, et montrer que le centre de gravité de l'aire de ce triangle reste fixe (*).

Épure (2 heures et demie).

Un tétraèdre SABC repose par sa base ABC sur le plan horizontal; l'angle trièdre S est trirectangle; les côtés de la base sont : AB = 209mm, BC = 193mm, AC = 149mm. AB est parallèle à la ligne de terre (A à droite) et à une distance de cette ligne de 22mm.

(*) Voici une solution géométrique de la seconde question. Nous publierons prochainement une solution algébrique qui nous a été adressée par M. Harivel, professeur de mathématiques.

1° Soient D′, E′, F′, les isotomiques des points D, E, F sur les côtés BC, CA, AB.

La droite FD′, par exemple, est parallèle à AC. Cette remarque, appliquée aux droites D′E, DE′, etc... prouve que les quadrilatères tels que AFD′E BDFE′,... sont des parallélogrammes.

Ces parallélogrammes sont équivalents. Par exemple

$$\textit{aire}\ \mathrm{AFD'E} = \textit{aire}\ \mathrm{AE'DF'}.$$

En effet, les triangles D′EC, BF′D sont égaux. De plus, les triangles D′AC, DAB sont équivalents. On a donc des aires égales pour les triangles D′AE, ADF′. Comme ces aires représentent les moitiés des aires AFD′E, AE′DF′, l'égalité de ces aires se trouve ainsi démontrée.

On conclut de cette remarque l'égalité des aires des triangles AFE, CED, BDF.

L'étude proposée de la variation de l'aire du triangle DEF, revient donc à celle du triangle AFE, ou à celle de l'aire du parallélogramme AFD′E, aire qui varie comme le produit des côtés D′E, D′F, puisque l'angle ED′F est constant.

Or on a
$$\frac{\mathrm{D'E}}{c} + \frac{\mathrm{D'F}}{b} = 1.$$

Puisque la somme des quantités $\frac{\mathrm{D'E}}{c}$, $\frac{\mathrm{D'F}}{b}$ est constante, le produit
$$\frac{\mathrm{D'E}}{c} \cdot \frac{\mathrm{D'F}}{b},$$
va constamment en croissant (quand D′ se déplace de C au milieu A de BC), depuis zéro jusqu'à $\frac{\mathrm{ABC}}{2}$. Du point A′ au sommet B, l'aire considérée repasse par les valeurs précédentes. Le maximum de cette aire, ou le minimum de DEF, a lieu quand D′ est en A′ ; c'est-à-dire pour $k = 1$.

2° Si nous cherchons le lieu du milieu de DF ; la figure BDE′F, comme nous l'avons fait observer, étant un parallélogramme, le milieu de DF coïncide avec le milieu de BE′, Le lieu cherché est la droite qui passe par les milieux des côtés BA, BC.

3° Imaginons trois forces égales à α, appliquées aux sommets D, E, F.

La force α, appliquée en D, peut être considérée comme la résultante

Construire l'intersection de ce tétraèdre et de la sphère qui passe par le point S et par les milieux des côtés du triangle ABC.

Pour la mise à l'encre, on représentera le solide commun à la sphère et au tétraèdre.

Calcul logarithmique (1 heure).

Résoudre un triangle connaissant

$$a = 789872, \qquad b = 807523, \qquad A = 77^\circ 33' 29'',6$$

On ne calculera pas la surface.

CERTIFICAT D'APTITUDE

A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(1re session. — Concours de 1892.)

Arithmétique et Algèbre.

I. Une personne verse dans une banque pendant n années de suite, au commencement de chaque année, des sommes respectivement égales aux termes consécutifs d'une progression arithmétique croissante commençant par a et ayant pour raison h. A la fin de n^{me} année, la somme due par la banque à cette personne est le double de ce qu'elle serait si tous les versements avaient été égaux entre eux et chacun d'eux égal à a.

1° En tenant compte des intérêts simples, au taux r par franc par an, calculer h en fonction de a, n et r.

Application numérique : $a = 2000$; $r = 0.04$; $n = 20$.

---

de deux forces :

$$\frac{k\alpha}{1+k}, \text{ appliqué en C (*)},$$

$$\frac{\alpha}{1+k}, \text{ appliquée en B.}$$

En décomposant de même la force α qui actionne le point E, on trouve qu'au point C il y a deux forces :

$$\frac{\alpha}{1+k}, \quad \frac{k\alpha}{1+k},$$

dont la somme est égale à α.

Finalement, les trois forces α appliquées aux points D, E, F peuvent être remplacées par trois forces α, appliquées respectivement aux sommets A, B, C. Donc les triangles ABC, DEF ont même centre de gravité.

(*) On a posé plus haut

$$\frac{DC}{DB} = k.$$

2° Même question et même application numérique en tenant compte des intérêts composés au taux r par franc par an, les intérêts se capitalisant tous les ans.

II. Exposer comment, au moyen de la dérivée on étudie les variations d'une fonction explicite d'une seule variable.

Application. Dans un plan P on donne un point A et un cercle de centre O et de rayon r. Un point S de l'espace se projette orthogonalement sur le plan P en un point B situé au milieu de OA; on donne $SB = h$ et $AO = a$. Par le point A on trace dans le plan P une sécante AMN qui rencontre le cercle O aux points M et N que l'on joint au point S. Le triangle SMN en tournant autour de MN, comme charnière, engendre un volume V.

Etudier les variations de ce volume V, lorsque la sécante AMN tourne dans le plan P, autour du point A.

Donner un tableau récapitulatif de ces variations.

QUESTION 386

Solution par Mme Vve F. Prime, à Bruxelles.

DE *étant une parallèle quelconque à* BC, *entre* AB *et* AC; F *la rencontre des perpendiculaires à* AC *en* E *et à* AB *en* B; *et* G *la rencontre des perpendiculaires à* AB *en* D *et à* AC *en* C; *démontrer 1° que* FG *est perpendiculaire à la symédiane issue de* A; 2° *que la distance du centre* O *de la circonférence* ABC *à la droite* FG, *comptée sur le diamètre* AO, *est égale au rayon du cercle* ADE. (Bernès.)

1° Par raison de similitude, la direction de FG est indépendante de la position de DE, et nous pouvons prendre une position particulière de ces éléments. Supposons que DE passe par A, alors

$$AF = \frac{c}{\sin A}, \quad AG = \frac{b}{\sin A}.$$

Soient AL la distance de A à FG et ML, NL, celles de L aux côtés AB, AC.

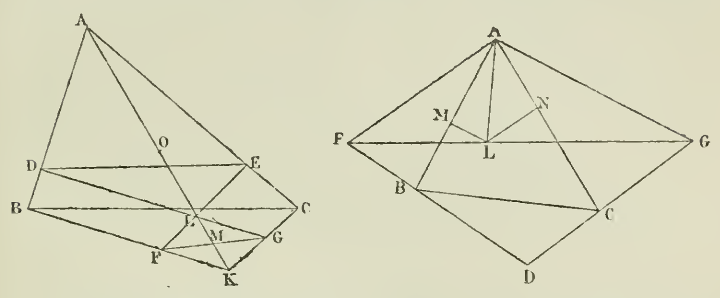
Les triangles semblables AML, ALC donnent

$$LM = \frac{\overline{AL}^2}{AG} = \frac{\overline{AL}^2 \sin A}{b}.$$

De même $$LN = \frac{\overline{AL}^2 \sin A}{c}.$$

Par suite, $LM : LN = c : b$;
ainsi le point L se trouve bien sur la symédiane issue de A dans le triangle ABC.

2° K étant le point de rencontre des droites EF, CG, et L,



celui des droites EF, DG, les points A, L, K sont en ligne droite; AK est le diamètre de ABC; AL, celui de la circonférence ADE. LKFG étant un parallélogramme, la distance cherchée

$$OM = \frac{OK + OL}{2} = \frac{OA + AL}{2} = \frac{AL}{2}.$$

C. Q. F. D.

QUESTION 416

Solution par B. Sollertinsky.

D'un point P, *intérieur à un triangle* ABC, *on mène les parallèles* DPE, FPG, HPK, *aux côtés.*

1° Trouver la relation qui existe entre les segments AG, AH, BD, BK, CF, CE.

2° Dans quelle partie du triangle ABC *le point doit-il être situé, pour que l'on puisse construire un triangle* XYZ, *avec les droites* DE, CF, HK, *prises comme côtés?*

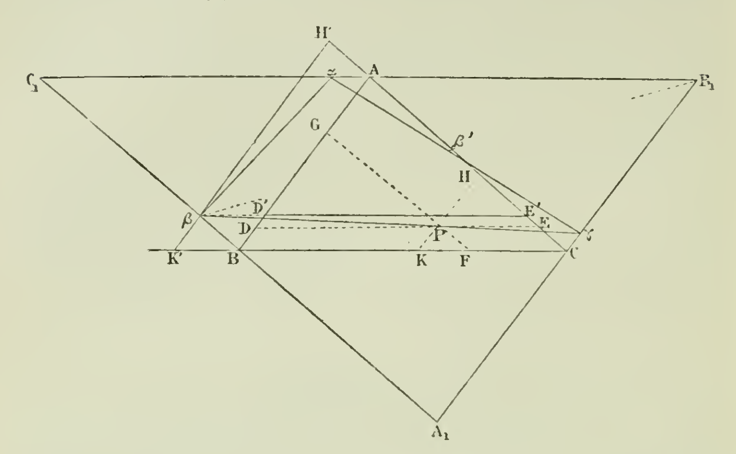
3° Ce triangle XYZ *étant supposé possible, soient* L, M, N *les projections de* P *sur* YZ, ZX, XY, *respectivement.*

Démontrer que les droites LX, MY, NZ *sont concourantes.*

(E. Catalan.)

Soit P un point extérieur ou intérieur au triangle ABC.

Si la droite AP (*) rencontre BC en A′, ce dernier point est le



centre d'homothétie des triangles ABC, PKF, d'où (en grandeur et en signe)

$$\frac{BA'}{A'C} = \left(\frac{KA'}{A'F} = \frac{BA' - KA'}{A'C - A'F}\right) = \frac{BK}{FC}.$$

De même
$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CE}{HA}; \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{AG}{DB}.$$

Mais, d'après le théorème de Céva

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

Donc : 1°

(1)
$$\frac{BK}{FC} \cdot \frac{CH}{HA} \cdot \frac{AG}{DB} = 1.$$

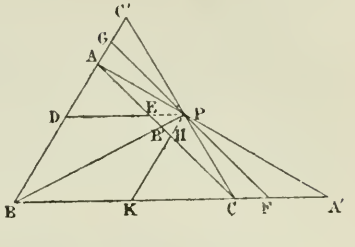
2° En observant qu'on a BK = DP = YL, FC = PE = LZ, etc., la relation (1) peut être écrite ainsi

$$\frac{YL}{LZ} \cdot \frac{ZM}{MX} \cdot \frac{XN}{NY} = 1;$$

ce qui montre que les droites LX, MY, NZ sont concourantes.

(*) Non tracée sur la figure.

3° Soient α, β, γ les points, sur les côtés du triangle anticomplémentaire $A_1B_1C_1$, isotomiques des pieds de ses bissectrices intérieures. On sait que les parallèles D′E′, H′K′, aux côtés BC, AB, menées par β, sont égales.



Soient encore D″E″, F″G″ les parallèles à BC, CA, menées par γ; posons

$$D'E' = H'K' = a', \qquad D''E'' = F''G'' = a''.$$

Si un point P divise le segment $\beta\gamma$ dans le rapport $\frac{m}{n}$, on a

$$DE = \frac{na' + ma''}{m+n}, \quad FG = \frac{ma''}{m+n}, \quad HK = \frac{na'}{m+m};$$

d'où

$$DE = FG + HK.$$

Lorsque le point P se meut sur FG, dans la direction positive, le segment DE diminue, HK croît, et l'on a $DE < FG + HK$. Il s'ensuit de là que *pour tout point* P, *à l'intérieur du triangle* $\alpha\beta\gamma$, les segments DE, FG, HK sont tels que la somme des deux d'entre eux est plus grande que le troisième; par suite, *le triangle* XYZ *est possible.*

QUESTION 407

Solution par M. Ch. Michel, élève au Collège Chaptal.

Deux ellipses égales et de même centre O *ont leurs grands axes perpendiculaires;* P *est un point quelconque de la première,* Q *et* Q′ *sont les points de la seconde où les tangentes sont perpendiculaires à* OP, *et* M, M′ *sont milieux de* PQ, PQ′.

a, b *étant les demi-axes des deux ellipses, démontrer que* OMPM′ *est un parallélogramme dont les côtés sont* $\frac{a+b}{2}$ *et* $\frac{a-b}{2}$, *et dont les bissectrices des angles ont les directions des axes des deux coniques.* (Laisant.)

O étant le milieu de QQ′, OMPM′ est un parallélogramme; les bissectrices de ses angles sont parallèles aux bissectrices de l'angle P.

Si nous faisons tourner, d'un angle droit, la seconde ellipse autour de son centre, les tangentes en Q et Q′ deviennent parallèles a OP; et, par suite, les points Q et Q′ viennent se confondre avec R et R′, extrémités du diamètre conjugué de OP, dans la première ellipse; donc, QQ′ est perpendiculaire à RR′, et, l'on a

$$OQ = OR.$$

En reproduisant sur cette figure la construction de Chasles, pour trouver les axes d'une ellipse connaissant deux diamètres conjugués, on arrive immédiatement à la proposition dont il s'agit.

La tangente en Q étant perpendiculaire sur OP, le diamètre QQ′ est égal et perpendiculaire au diamètre de la première ellipse, conjugué de OP.

Si p est le centre du parallélogramme OMPM′, le lieu de p' est une ellipse homothétique de la première et ayant pour demi-axes $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ · MM′ est donc la normale en p, et pM $= p$M est égal au demi-diamètre conjugué de Op. Or on sait qu'alors $OM = \frac{a+b}{2}$, $OM' = \frac{a-b}{2}$ et que les axes de l'ellipse Op sont les bissectrices de l'angle MOM′ (Chasles).

NOTA. — M. B. Sollertinsky nous a adressé une solution analogue.

QUESTION 417

Solution par M. B. SOLLERTINSKY.

L'orthocentre n'est jamais sur le cercle de Brocard, sauf dans le cas limite qui correspond au triangle équilatéral.

(E. Lemoine.)

Soient O, H, K le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le point de Lemoine d'un triangle ABC. Pour que le point H soit sur le cercle de Brocard, la droite KH doit être perpen-

diculaire sur OH et, par suite, parallèle à l'axe orthique de ABC, représenté par l'équation

$$\sum x \cos A = 0.$$

Mais, pour cela, les coefficients l, m, n de l'équation de KH doivent satisfaire à la condition

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ a & b & c \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle peut s'écrire ainsi

$$\sum l \sin (B - C) = 0.$$

La droite KH a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ \sec A & \sec B & \sec C \end{vmatrix} = 0,$$

ou, après des réductions faciles,

$$\sum x \cos^2 A \sin (B - C) = 0.$$

Ainsi, pour que H soit sur le cercle de Brocard, on doit avoir

$$\sum [\cos A \sin (B - C)]^2 = 0,$$

ce qui est impossible à moins que

$$A = B = C.$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(8 juillet 1892, Paris.)

1° Couper une sphère de rayon donné par un plan tel que le volume du plus petit des deux segments dans lesquels ce plan partage la sphère ait un rapport donné k avec le volume du cône ayant son sommet au centre de la sphère et même base que le segment.

2° Exécuter à main levée et expliquer l'épure qui donne l'angle de deux plans dans le cas particulier où les traces horizontales de ces plans sont parallèles (*).

(*) Cette année, pour la première fois, tous les candidats au baccalauréat ès sciences, à Paris, réunis, à cet effet, dans la Galerie des Machines au Champ de Mars, ont subi la même épreuve écrite. On ne peut qu'applaudir à cette innovation et souhaiter que désormais un seul et même exercice écrit soit proposé aux examens du baccalauréat, pour tous les candidats.

QUESTIONS PROPOSÉES

428. — Exercice de calcul. Simplifier le polynome

$$\begin{aligned}&(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\\ &+x(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\\ &+x^2(1-x^3)(1-x^4)\ldots(1-x^n)\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+x^n\ (*)\end{aligned}$$

(*E. Catalan.*)

429. — Le premier cercle de *Lemoine* est le cercle qui passe par les intersections des côtés avec les parallèles aux trois côtés menées par le point de Lemoine. (*Lemoine.*)

430. — PQR est la ligne de *Simson* d'un triangle ABC relative au point M. On voit MA, MB, MC sous les angles A′, B′, C′ du centre à la circonférence du cercle circonscrit de ABC.

Démontrer que

$$\sin^2 A' \sin A \,.\, \frac{MP}{QR} = \sin^2 B' \,.\, \sin B \,.\, \frac{MQ}{RP} = \sin^2 C' \,.\, \sin C \,.\, \frac{MR}{PQ}.$$

(*W. J. Greenstreet*, M. A.)

431. — Chercher la condition pour que $a \sin b\theta - b \sin a\theta = M(\sin^3 \theta)$. (*W. J. Greenstreet*, M. A.)

432. — Le premier cercle de *Lemoine* et le second cercle de *Lemoine* se coupent suivant un diamètre du second cercle lequel passe par le point à l'infini, inverse du point de *Steiner* et est parallèle à l'axe radical du cercle de *Brocard* et du deuxième cercle de *Lemoine*. (*E. Lemoine.*)

(*) Le résultat est remarquable.

Le Directeur Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 14282-6-92.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, voir page 145.)

RELATIONS ENTRE LES COORDONNÉES TRIPOLAIRES, NORMALES ET ANGULAIRES DE DEUX POINTS SYMÉTRIQUEMENT INVERSES. — AUTRES RELATIONS.

XXIII. — **Coordonnées tripolaires.**

La similitude de ABm, AMC, et celle de ACm, AMB, donnent

$$\frac{Am}{1} = \frac{b.Bm}{CM} = \frac{c.Cm}{BM} = \frac{bc}{AM};$$

ou, sous forme symétrique :

$$Am.AM = bc, \frac{Bm.BM}{c} = \frac{Cm.CM}{b} = \frac{Bm.Cm}{Am} = \frac{BM.C}{AM},$$

les trois dernières comprenant la première.

PREMIÈRE APPLICATION. — *Calculer les côtés* p_1, q_1, r_1, *du podaire* $P_1Q_1R_1$ *de* m *relativement, à* ABC, *en fonction des côtés* p, q, r *du podaire* PQR *de* M.

On a $$p = \frac{a.AM}{2R}, \ q = \frac{b.BM}{2R}, \ r = \frac{c.CM}{2R};$$

$$p_1 = \frac{a.Am}{2R}, \ q_1 = \frac{b.Bm}{2R}, \ r_1 = \frac{c.Cm}{2R}.$$

De là résulte $$pp_1 = \frac{a^2bc}{4R^2} = \frac{aS}{R}.$$

Le produit de ces deux côtés est donc constant pour tous les couples de points symétriquement inverses. Puis

$$q_1 = \frac{ab}{2R}.\frac{r}{p}, \qquad r_1 = \frac{ac}{2R}.\frac{q}{p};$$

et, sous forme symétrique,

$$\frac{qq_1}{b} = \frac{rr_1}{c} = \frac{a.qr}{2R.p} = \frac{a.q_1r_1}{2Rp_1}.$$

Remarque. — Les deux podaires ne peuvent être semblables, à moins que m et M coïncident. Car la similitude exige que

$$\frac{AM}{Am} = \frac{BM}{Bm} = \frac{CM}{Cm} = \sqrt{\frac{BM.CM}{Bm.Cm}} = \sqrt{\frac{AM}{Am}};$$

d'où

$$Am = AM,\ Bm = BM,\ Cm = CM.$$

Les deux points doivent donc coïncider, et par conséquent se trouver sur la bissectrice de A′ à une distance de A égale à $\sqrt{bc}$, de l'un ou de l'autre côté de A.

Deuxième application. — **Théorème.** — *Étant donnés deux points* m, m_1 *symétriques relativement à* BC, *par l'un d'eux* m *et le point* A *on fait passer deux circonférences, tangentes l'une à* AC, *l'autre à* AB *dont la première est rencontrée par* Cm *en* k *et la seconde par* Bm *en* k′. *Si* n, n_1 *sont les deux points d'intersection des cercles décrits de* C *et* B *comme centres, avec* Ck, Ck′ *pour rayons, démontrer que les mêmes constructions effectuées en remplaçant* m *par* m_1 *redonnent les mêmes points* n, n_1, *et que les transformés* M, M_1, N, N_1, *des quatre points* m, m_1, n, n_1, *forment deux couples de points conjugués* M, M_1, N, N_1, *dont les coordonnées tripolaires sont inversement proportionnelles.*

On a, d'après la construction, $Cm.Cn = b^2$, $Bm.Bn = c^2$. Ce qui donne

$$BM.BN = AM.AN,\ CM.CN = AM.AN.$$

D'ailleurs, comme m et m_1 sont symétriques relativement à BC, ainsi que n et n_1, M et M_1 forment un couple de points conjugués, N et N_1 un second couple, et l'on voit que les coordonnées tripolaires, relatives à l'un des couples, sont inversement proportionnelles à celles de l'autre. Si l'on remplace, dans les constructions, m par m_1, le premier couple M, M_1, ne changera pas et l'on obtiendra encore un second couple qui aura ses coordonnées tripolaires inversement proportionnelles à celles du couple MM_1 ; par conséquent il se confondra avec le couple N, N_1, ce qui exige que l'on obtienne ainsi les mêmes points n, n_1.

XXIV. **Coordonnées normales.** — Désignons par X, Y, Z, les coordonnées normales de M ; par x, y, z celles de m ; par

M_0, m_0 les puissances de M et m relativement à la circonférence ABC. On a vu § XX que

$$\frac{M_0}{\overline{AM}^2} = \frac{2R.r}{bc}.$$

De là

$$x = \frac{bc}{2R} \cdot \frac{M_0}{\overline{AM}^2}.$$

M_0 étant donné par

$$\frac{M_0}{2R} = -\frac{\sum aYZ}{2S}$$

et $\overline{AM}^2$ par

$$\overline{AM}^2 = \frac{Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos A}{\sin^2 A},$$

ou encore, par

$$\overline{AM}^2 = M_0 + \frac{2R}{a}(bZ + cY).$$

Les similitudes évidentes de AmQ_1, AMR, et de AmR_1, AMQ donne ensuite

$$\frac{y}{Z} = \frac{z}{Y} = \frac{Am}{AM} = \frac{bc}{\overline{AM}^2}$$

Les formules de passage sont donc

$$\frac{x}{\left(\frac{M_0}{2R}\right)} = \frac{y}{Z} = \frac{z}{Y} = \frac{bc}{\overline{AM}^2};$$

ou

$$\frac{X}{\left(\frac{m_0}{2R}\right)} = \frac{Y}{z} = \frac{Z}{y} = \frac{bc}{\overline{Am}^2}.$$

Plusieurs relations intéressantes se rattachent à la considération de ces coordonnées.

1° Par division, on obtient $\frac{M_0 . X}{m_0 . x} = \frac{Y.Z}{y.z}$; et, par multiplication, $\frac{M_0 . m_0}{4R^2} = Xx$.

Si, S_1, s_1 sont les aires des podaires PQR, $P_1Q_1R_1$, considérées en grandeur et en signe, selon le sens rotatoire des éléments,

$$\frac{M_0}{4R^2} = -\frac{S_1}{S}, \qquad \frac{m_0}{4R^2} = -\frac{s_1}{S}.$$

De là résultent :

$$\frac{S_1X}{s_1x} = \frac{YZ}{yz}, \qquad \frac{S_1 . s_1}{S^2} = \frac{X.x}{4R^2}.$$

2° Si, ρ, ρ_1 désignent les rayons des cercles circonscrits aux deux

podaires, ces rayons étant supposés affectés des mêmes signes que les aires S_1, s_1, *on a, en grandeur et en signe,* $\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{X}{x}$. *Les centres de similitude de ces deux cercles sont le point* A *et le point* I *où se coupent* Mm *et* BC.

Soient M', m' les isogonaux de M, m; K, K_1 les milieux de MM', mm', qui sont les centres des podaires. D'après le théorème I du § XIX, Mm, $M'm'$ se croisent en un point I situé sur BC; et comme MM', $m'm$ sont parallèles, AI passe par K et K_1. Les trois droites PP_1, KK_1, Mm sont trois droites concourantes en I et coupées par les parallèles MP et mP_1, MK, mK_1. Donc les triangles PKM, P_1k_1m sont homothétiques relativement à I et l'on a, en prenant les longueurs en grandeur et en signe,

$$\frac{KP}{K_1P_1} = \frac{MP}{mP_1} = \frac{MK}{mK_1} = \frac{MM'}{mm'} = -\frac{AK}{AK_1} = \frac{IK}{IK_1},$$

ou

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{X}{x} = -\frac{AK}{AK_1} = \frac{IK}{IK_1}.$$

Par hypothèse, $\frac{\rho}{\rho_1}$ a le signe de $\frac{S_1}{s_1}$ ou de $S_1 s_1$; et, par suite, celui de Xx ou de $\frac{X}{x}$. Ce signe indique si les deux triangles PQR, $P_1Q_1R_1$ présentent le même sens rotatoire ou des sens contraires.

Il est évident, par la démonstration, que $\frac{X}{x} = \frac{X'}{x'}$, les coordonnées X', x' se rapportant à M' et m'. On arriverait encore à la formule $\frac{\rho}{\rho} = \frac{X}{x}$ au moyen des égalités

$$4\rho S_1 = pqr = \frac{abc}{8R^3}.AM.BM.CM,$$

où ρ est supposé du signe de S_1, et

$$4\rho_1 s_1 = \frac{abc}{8R^3}\,Am.Bm.Cm.$$

Comme

$$\frac{BM.CM}{Bm.Cm} = \frac{AM}{Am},$$

on a

$$\frac{\rho}{\rho_1}.\frac{S_1}{s_1} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{Am}^2}.$$

De là $$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\overline{AM}^2 m_0}{\overline{Am}^2 M_0} = \frac{X}{x}.$$

Nous donnons cette seconde explication pour faire remarquer l'égalité $2\rho M_0 = - AM.BM.CM$ qui résulte de
$$4\rho S_1 = \frac{abc}{8R^3} AM.BM.CM.$$

Cette égalité permet d'exprimer ρ en fonction des coordonnées tripolaires de M; car on sait que
$$M_0 = \frac{R^2}{2S}\left(\sum \overline{AM}^2 \sin 2A - 4S\right).$$

3° Si l'on désigne par T, *les trois produits égaux* XX′, YY′, ZZ′, *et, par* t, *les produits* xx′, yy′, zz′, *on a* $\frac{T}{t} = \frac{X^2}{x^2}$.

C'est ce qui résulte de $\frac{X}{x} = \frac{X'}{x'}$.

Ces quantités T, *t* jouent un rôle important dans l'évaluation de diverses grandeurs qui se rattachent aux points M, m, M', m'. Rappelons-en quelques-unes.
$$\frac{S_1}{S} = \frac{XYZ}{2RT}, \qquad \text{ou} \qquad M_0 = -\frac{2RXYZ}{T};$$
$$M_0 . M_0' = 4R^2.T;$$
$$\frac{AM}{X.AM} = \frac{BM'}{Y.BM} = \frac{CM'}{Z.CM} = \frac{T}{XYZ}.$$
$$X.OG = Y.OG_1 = Z.OG_2 = \frac{R.XYZ}{T},$$
où G, G_1, G_2 désignent les centres des cercles MBC, MCA, MAB.

Enfin, et c'est là le point le plus important à signaler, T *est égal à la puissance, changée de signe, du point* M *relativement au cercle circonscrit à son podaire :* $T = - M_k$.

Si en effet L est la projection du centre K sur BC, on a
$$\rho^2 = \overline{KP}^2 = \overline{KL}^2 + \overline{LP}^2.$$

Or $$KL = \frac{X + X'}{2} \quad \text{et} \quad LP^2 = KM^2 - \left(\frac{X - X'}{2}\right)^2.$$

D'où $$\rho^2 = \overline{KM}^2 + X.X' = \overline{KM}^2 + T.$$

Donc $T = - M_k$. On en déduirait l'expression de ρ en fonction des coordonnées normales de M.

4° Désignons par u, u_1 les quantités $\frac{AM.BM.CM}{XYZ}$, $\frac{Am.Bm.Cm}{xyz}$, lesquelles, ainsi qu'il a été dit (*J. E.*, mai 1891), représentent les rapports de similitude du triangle ABC avec les troisièmes podaires de M et m. Il est facile de voir que $\frac{u}{u_1} = \frac{x}{X}$.

Car $$\frac{BM.CM}{Bm.Cm} = \frac{AM}{Am}, \quad \frac{u}{u_1} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{Am}^2} \cdot \frac{yz}{YZ} \cdot \frac{x}{X}.$$

Or de $\frac{y}{Z} = \frac{z}{Y} = \frac{Am}{AM}$, il suit $\frac{yz}{YZ} = \frac{\overline{Am}^2}{\overline{AM}^2}$. Donc $\frac{u}{u_1} = \frac{x}{X}$.

On arriverait au même résultat au moyen de cette formule, bonne à signaler, $4\rho\rho'' = T$ dans laquelle ρ'' est le rayon du cercle circonscrit au troisième podaire de M.

(*A suivre.*)

CONCOURS DE SAINT CYR* (1892).

Solution par M. Harivel professeur de mathématiques.

1er Problème. — *On donne un triangle* ABC, *rectangle en* A, *et les perpendiculaires en* B *et* C *au plan de ce triangle. Trouver sur ces perpendiculaires, d'un même côté du plan* ABC, *deux points* B′ *et* C′ *tels que l'angle* B′AC′ *soit égal à un angle donné* α, *et que l'aire de ce triangle soit égale à une quantité donnée* K^2.

Soient $BB' = x, \quad CC' = y.$

L'aire du triangle B′AC′ est

$$\frac{1}{2} AB' \times AC' \sin \alpha,$$

ou :

$$(1) \qquad \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + c^2} \sqrt{y^2 + b^2} \sin \alpha = K^2.$$

(*) Dans le prochain numéro nous donnerons une solution géométrique par M. Lauvernay.

Menons, par C', une parallèle C'C'' à BC.

Dans le triangle rectangle B'C'C'',

$$B'C'^2 = \overline{C'C''}^2 + \overline{B'C''}^2.$$

En remplaçant $B'C'^2$ par sa valeur en fonction des côtés du triangle B'AC' et de l'angle α, C'C'' par a, et B'C'' par $x - y$:

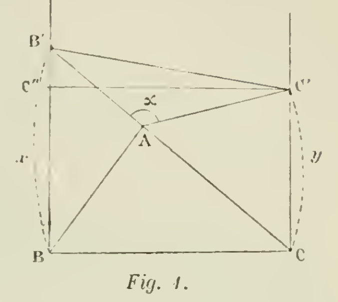


Fig. 1.

$$x^2+y^2+c^2+b^2-2\sqrt{(x^2+c^2)(y^2+b^2)}\cos\alpha = a^2 + (x-y)^2.$$

Simplifions en observant que $a^2 = b^2 + c^2$, et que le radical, d'après l'équation (1), est à $\frac{\sin\alpha}{2K^2}$:

$$(2) \qquad \frac{2\cos\alpha K^2}{\sin\alpha} = xy.$$

D'ailleurs l'équation (1) devient, après élévation au carré,

$$x^2y^2 + x^2b^2 + c^2y^2 + b^2c^2 = \frac{4K^4}{\sin^2\alpha};$$

ou, en remplaçant xy par sa valeur :

$$\frac{4\cos^2\alpha K^4}{\sin^2\alpha} + x^2b^2 + c^2y^2 + b^2c^2 = \frac{4K^4}{\sin^2\alpha}$$

d'où

$$(3) \qquad b^2x^2 + c^2y^2 = 4K^4 - b^2c^2.$$

L'équation (2) peut s'écrire, en multipliant les deux membres par $2bc$:

$$(4) \qquad 2bcxy = 4bcK^2\cot\alpha.$$

Ajoutons, membre à membre, (3) et (4) :

$$(bx+cy)^2 = 4bcK^2\cot\alpha + 4K^4 - b^2c^2.$$

On connaît donc maintenant la somme et le produit de bx et de cy, lesquels sont par suite racines de l'équation

$$X^2 - \sqrt{4bcK^2\cot\alpha + 4K^4 - b^2c^2}\,X + 2bcK^2\cot\alpha = 0.$$

Condition de réalité : $4K^4 - 4bcK^2\cot\alpha - b^2c^2 \geqslant 0$.

Le trinôme en K^2, égalé à zéro, ayant ses racines réelles doit pour être positif n'admettre que des valeurs de K^2 supérieures à la racine positive ; on a donc, pour la condition de possibilité du problème,

$$K^2 \geqslant \frac{2bc\cot\alpha + \sqrt{4b^2c^2\cot^2\alpha + 4b^2c^2}}{4},$$

ou
$$K^2 \geqslant \frac{bc(\cos\alpha + 1)}{2 \sin\alpha},$$

ou
$$K^2 \geqslant \frac{2bc \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}},$$

ou enfin
$$K^2 \geqslant \frac{bc}{2} \cot \frac{\alpha}{2}.$$

Le coefficient de X doit être réel; d'où, par un calcul analogue,

$$K^2 \geqslant \frac{bc}{2}\, tg \frac{\alpha}{2}$$

Cette dernière condition comprend la première, si α est obtus; la première condition comprend au contraire la seconde, si α est aigu.

S'il en est ainsi, on trouve pour bx et pour cy deux valeurs positives, car les deux racines de l'équation en X sont positives; il suffit de diviser par b et c pour avoir x et y.

2e Problème. — *On donne un triangle* ABC, *et sur les côtés de ce triangle les points* D, E, F, *tels que l'on ait :*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = K.$$

1° Evaluer, en fonction de l'aire du triangle ABC *et du rapport donné* K *les aires des triangles* AFE, BDF, DEF, *puis suivre les variations de l'aire de ce triangle* DEF, *lorsque* K *vaie.*

2° En supposant toujoursque K *varie, trouver le leiu géométrique décrit par le milieu de chaque côté du triangle* DEF, *et montrer que le centre de gravitéde ce triangle reste fixe.*

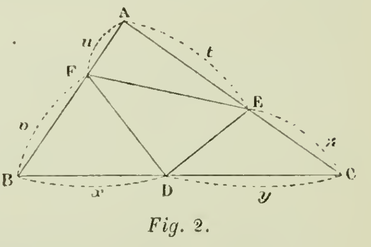


Fig. 2.

Soient x, y, z, t, u, v les segments déterminés par les points DEF sur les côtés, désignés par a, b, c.

Nous avons les six relations.

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \frac{u}{v} = K.$$

$$x + y = a,$$
$$z + t = b,$$
$$u + v = c;$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{aK}{1 + K},$$
$$y = \frac{a}{1 + K},$$
$$z = \frac{bK}{1 + K},$$
$$t = \frac{b}{1 + K},$$
$$u = \frac{cK}{1 + K},$$
$$v = \frac{c}{1 + K}.$$

Ceci posé,

$$\text{aire DEC} = \frac{1}{2}\, yz \sin c = \frac{1}{2} \frac{ab \sin cK}{(1 + K)^2}.$$

Mais $\frac{1}{2}\, ab \sin C$ est égale à l'aire du triangle ABC, que nous désignerons par S.

Donc

$$\text{aire DEC} = \frac{KS}{(1 + K)^2}.$$

On verrait de même que les aires des triangles AEF, BDF sont équivalentes à celle-ci.

Donc,

$$\text{DEF} = S - \frac{3KS}{(1 + K)^2},$$

ou

$$\text{DEF} = \frac{S(1 + K^2 - K)}{(1 + K)^2} = u.$$

Pour étudier les variations de u, remarquons tout d'abord que le numérateur est toujours positif. D'autre part, K devant rester positif, le dénominateur ne s'annule pas, dans les limites où l'on peut faire varier K.

Cela posé, cherchons si ce rapport peut avoir un maximum ou un minimum. On a

$$u' = S\, \frac{(2K - 1)(1 + K) - 2(1 + K^2 - K)}{(1 + K)^3}.$$

u' est nul si l'on a

$$2K^2 - K + 2K - 1 - 2 - 2K^2 + 2K = 0,$$

ou

$$K = 1.$$

Pour une valeur de K un peu inférieure à 1 la dérivée est négative, donc la fonction est décroissante, par suite, puisque

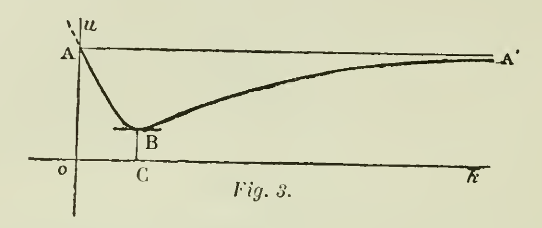


Fig. 3.

pour $K = 1$, la dérivée s'annule en changeant de signe, c'est que la fonction y passe par un minimum pour $K = 1$. Le tableau suivant résume la variation :

K	o , croît , 1 , croît , ∞
u	S , décroît , min. , croît , S

Prenons deux axes de coordonnées OK, OU rectangulaires; K variant de zéro à l'infini, la courbe représentative de la marche de la fonction aura la forme indiquée par la *fig. 3*. En prenant OA = S, la parallèle à OK, la droite AA' sera une asymptote. Le coefficient angulaire de la tangente au point A s'obtiendra en faisant K = 0 dans l'expression de la dérivée; on trouve ainsi $u' = -3S$.

2° Soit I le milieu de DE : prenons, pour axes de coordonnées Bx et une perpendiculaire By.

Soient x', y' les coordonnées du point I :

$$x' = \overline{BI'} = \frac{BD + BE'}{2} = \frac{\frac{aK}{1+K} + \left(a - \frac{bK \cos C}{1+K}\right)}{2},$$

ou

$$2x' = \frac{a(2K+1) - bK \cos c}{1+K}. \qquad \text{(I)}$$

De même

$$y' = II' = \frac{EE'}{2},$$

ou

$$2y' = \frac{bK \sin C}{1+K}. \qquad \text{(II)}$$

En éliminant K on a l'équation du lieu.

Les équations ci-dessus peuvent s'écrire :

$$K(2x' - 2a + b\cos C) = a - 2x',$$

$$K(b\sin C - 2y') = 2y'.$$

L'équation du lieu cherché est donc

$$2bx'\sin C - 2(a - b\cos C)y' - ab\sin C = 0.$$

Ce lieu est une droite, dont l'équation est vérifiée par

$$x' = \frac{a}{2}, \quad y' = 0,$$

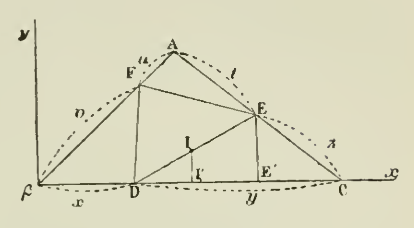


Fig. 4.

Elle passe par le milieu de BC ; elle passe aussi par le milieu de AC ; donc le lieu du point I est une parallèle au côté AB équidistante du point C et du côté AB.

On trouverait, de même, pour lieux des milieux de FD et de EF, des parallèles aux côtés AC et BC menées par les milieux des deux autres côtés.

EXERCICES (*)

Par M. **Boutin.**

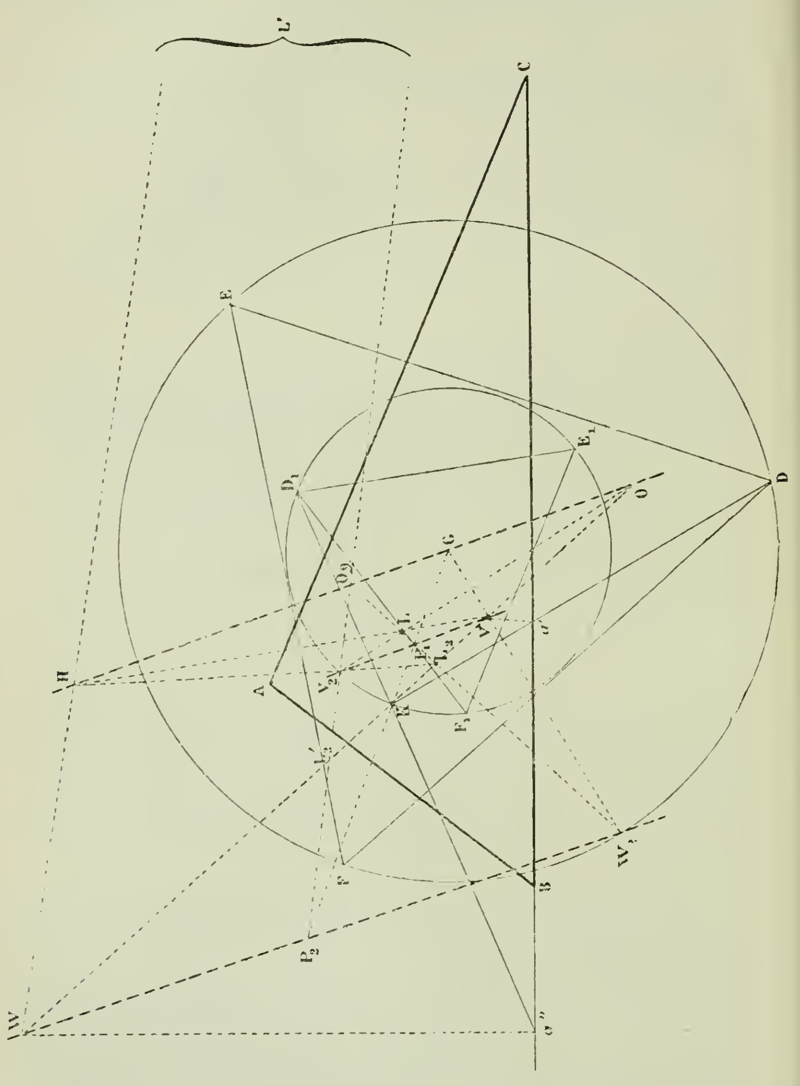
I. — *On construit sur les côtés du triangle de référence, extérieurement et intérieurement, des triangles isoscèles semblables,* BCD, CAE, ABF; BCD_1, CAE_1, ABF_1. *Déterminer l'angle à la base* λ *de ces triangles de manière que les triangles* DEF, $D_1E_1F_1$ *soient équilatéraux.*

(*) Les 32 exercices qui suivent constituent une véritable Note pouvant servir de complément à une étude parue dans le *J. M. E.*, en 1889, *sur les centres isodynamiques et isogones.*

Nous rappelons que, d'après les notations usitées dans la Note citée, les lettres : G, H, O, K, Z, O_9, V, W, P_1, P_2, V_2, W_2, θ, φ, désigneront respectivement : le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, le point de Lemoine, le centre du cercle de Brocard, le centre du cercle des neuf points, les centres isodynamiques, les centres des deux triangles équilatéraux podaires, les centres isogones, l'angle de Brocard, et l'angle donné par la formule

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C.$$

Les triangles DEF, $D_1E_1F_1$ sont les triangles de Kiepert



répondant à l'angle de Kiepert λ. L'angle de Brocard θ_1 de ces triangles est donné par la formule

$$\cot\theta_1 = \frac{3\cot\theta \operatorname{tg}^2\lambda \pm 6\operatorname{tg}\lambda + \cot\theta}{3\cot^2\lambda \pm 2\cot\theta\operatorname{tg}\lambda + 1}.$$

On prend le signe $+$, ou le signe $-$, suivant que les triangles isocèles sont extérieurs ou intérieurs. La condition $\theta_1 = 30°$ entraîne l'égalité des côtés pour le triangle de Kiepert correspondant, et donne l'équation qui détermine λ, on trouve, dans les deux cas, $\lambda = 30°$.

Ce résultat est connu (voir *J. M. E.*, année 1887, p, 232, question 146).

Les droites AD, BE, CF, concourent en un point L; les droites AD_1, BE_1, CF_1 concourent en un point L'. Ces deux points appartiennent à l'hyperbole de Kiepert. Leurs coordonnées normales sont

(L) $x\sin(A+30°) = y\sin(B+30°) = z\sin(C+30°)$,

(L') $x\sin(A-30°) = y\sin(B-30°) = z\sin(C-30°)$.

Nous allons les relier aux autres points remarquables du triangle.

II. — L *est situé sur* O_9P_1, L' *sur* O_9P_2.

Les équations de O_9P_1, O_9P_2 sont :

$$\begin{vmatrix} x & \sin A.\sqrt{3} + 2\sin B\sin C & \cos(B-C) \\ y & \sin B.\sqrt{3} + 2\sin A\sin C & \cos(C-A) \\ z & \sin C.\sqrt{3} + 2\sin A\sin B & \cos(A-B \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x & \sin A.\sqrt{3} - 2\sin B\sin C & \cos(B-C) \\ y & \sin B.\sqrt{3} - 2\sin A\sin C & \cos(C-A) \\ z & \sin C.\sqrt{3} - 2\sin A\sin B & \cos(A-B) \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit de constater que l'on a

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sin(A+30°)} & \sqrt{3}\sin A + 2\sin B\sin C & \cos(B-C) \\ \frac{1}{\sin(B+30°)} & \sqrt{3}\sin B + 2\sin A\sin C & \cos(C-A) \\ \frac{1}{\sin(C+30°)} & \sqrt{3}\sin C + 2\sin A\sin B & \cos(A-B) \end{vmatrix} = 0.$$

et

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sin(A-30^\circ)} & \sqrt{3}\sin A - 2\sin B\sin C & \cos(B-C) \\ \frac{1}{\sin(B-30^\circ)} & \sqrt{3}\sin B - 2\sin A\sin C & \cos(C-A) \\ \frac{1}{\sin(C-30^\circ)} & \sqrt{3}\sin C - 2\sin A\sin B & \cos(A-B) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette vérification ne présente d'autre difficulté que la longueur des calculs; nous laissons au lecteur le soin de la faire, ainsi que celle des autres identités que nous rencontrerons encore.

III. — L *est situé sur* HV, L′ *sur* HW.

On doit vérifier les deux identités suivantes:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\cos A} & \frac{1}{\sin(A+30^\circ)} & \sin(A+60^\circ) \\ \frac{1}{\cos B} & \frac{1}{\sin(B+30^\circ)} & \sin(B+60^\circ) \\ \frac{1}{\cos C} & \frac{1}{\sin(C+30^\circ)} & \sin(C+60^\circ) \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\cos A} & \frac{1}{\sin(A-30^\circ)} & \sin(A-60^\circ) \\ \frac{1}{\cos B} & \frac{1}{\sin(B-30^\circ)} & \sin(B-60^\circ) \\ \frac{1}{\cos C} & \frac{1}{\sin(C-30^\circ)} & \sin(C-60^\circ) \end{vmatrix} = 0.$$

IV. — L *est sur la droite* OV_2, L′ *sur la droite* OW_2.

On peut le vérifier par des identités analogues aux précédentes.

On peut encore observer que VV_2, WW_2 étant parallèles à OH, les figures OHV_2V, OHW_2W sont des trapèzes. D'après ce qui précède, L, L′ sont les points de concours respectifs des diagonales de ces trapèzes.

Cette proposition résulte encore d'un théorème général de M. M'Cay, sur le triangle de Kiepert.

V. — *Les points* O_9, P_1, W_2 *sont en ligne droite. Il en est de même des points* O_9, P_2, V_2.

Il suffit de vérifier les identités :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sin(A-60^\circ)} & \sqrt{3}\sin A + 2\sin B\sin C & \cos(B-C) \\ \frac{1}{\sin(B-60^\circ)} & \sqrt{3}\sin B + 2\sin A\sin C & \cos(C-A) \\ \frac{1}{\sin(C-60^\circ)} & \sqrt{3}\sin C + 2\sin A\sin B & \cos(A-B) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sin(A+60^\circ)} & \sqrt{3}\sin A - 2\sin B\sin C & \cos(B-C) \\ \frac{1}{\sin(B+60^\circ)} & \sqrt{3}\sin B - 2\sin A\sin C & \cos(C-A) \\ \frac{1}{\sin(C+60^\circ)} & \sqrt{3}\sin C - 2\sin A\sin B & \cos(A-B) \end{vmatrix} = 0.$$

VI. — *Le point* L_2 *inverse de* L *est à l'intersection des droites* OK, O_9W_2, HV_2. *Le point* L'_2 *inverse de* L' *est à l'intersection des droites* OK, O_9V_2, HW_2.

Les coordonnées normales de L_2 sont :

$$\frac{x}{\sin(A+30^\circ)} = \frac{y}{\sin(B+30^\circ)} = \frac{z}{\sin(C+30^\circ)};$$

ce point est évidemment sur OK. Les égalités :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sin(A-60^\circ)} & \cos(B-C) & \sin(A+30^\circ) \\ \frac{1}{\sin(B-60^\circ)} & \cos(C-A) & \sin(B+30^\circ) \\ \frac{1}{\sin(C-60^\circ)} & \cos(A-B) & \sin(C+30^\circ) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\cos A} & \frac{1}{\sin(A+60^\circ)} & \sin(A+30^\circ) \\ \frac{1}{\cos B} & \frac{1}{\sin(B+60^\circ)} & \sin(B+30^\circ) \\ \frac{1}{\cos C} & \frac{1}{\sin(C+60^\circ)} & \sin(C+30^\circ) \end{vmatrix} = 0,$$

exprimant que L_2 est sur O_9W_2, HV_2, sont des identités.

Même démonstration pour ce qui concerne le point L'_2.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Premiers principes d'algèbre, à l'usage des classes de troisième et de seconde de l'enseignement secondaire moderne, de l'enseignement primaire supérieur, des écoles normales primaires et des candidats aux écoles supérieures de commerce, par C. A. Laisant et Élie Perrin. — Paris, Ch. Delagrave 1892. Prix : broché 2 fr. 50, cartonné 2 fr. 75, reliure anglaise 3 fr.

Voici un nouveau livre dans toute l'acception élogieuse du mot, nouveau par son plan, nouveau par l'ensemble des matières qu'il comprend, nouveau par l'idée qui a guidé les auteurs, d'intéresser les élèves à la science dont ils doivent connaître les principes en leur donnant le désir d'en poursuivre l'étude.

Ainsi que MM. L. et P. l'indiquent dans l'avant-propos, ils ont, avant tout, cherché à présenter avec la plus grande clarté et la plus grande simplicité les premiers éléments de cette langue du calcul qui s'appelle l'Algèbre; c'est un livre d'initiation, destiné à ceux qui en abordent l'étude, ne possédant seulement que les théories fondamentales de l'Arithmétique.

En dehors des exercices nombreux, *très variés* et remarquablement choisis dont les énoncés figurent dans ce volume, en dehors des théories indiquées sommairement dans l'appendice et qui ne se trouvent pas en général dans les livres de cette nature, il y a lieu d'insister sur quelques points essentiels qui donnent plus spécialement au livre son caractère d'originalité.

Pour la pratique de l'enseignement : l'abondance de tableaux types de discussions, surtout pour les équations du deuxième degré; la rédaction des règles mises en vedette et composée en caractères différents de ceux du texte, oblige l'élève à se fixer dans l'esprit le résumé des théories apprises.

Au point de vue de la doctrine : l'insistance des auteurs sur la *nécessité* de distinguer entre la solution d'un problème et la solution des équations correspondantes est capitale; il en ressort l'obligation de *toujours* interpréter les solutions trouvées, en les reportant dans l'énoncé quelle que soit la nature de ces solutions. Nous ne croyons pas qu'il existe un autre livre où la chose ait été mise en lumière au même degré, ni appuyée d'exemples aussi frappants.

Je signale, en passant, une innovation qui me semble fort utile : les auteurs au commencement du calcul par équations (12e leçon) n'ont pas craint de donner la notion générale de l'idée de *fonction*, idée qui, formant le fond même de l'analyse, est cependant si simple et qu'on a, d'habitude, le grand tort de proscrire des éléments; ils appuient les considérations qu'ils présentent à ce sujet et à celui des *formules* algébriques, d'une citation de Lagrange (pp. 74-75) qui devrait avoir depuis longtemps pris droit de cité dans l'enseignement le plus élémentaire, tellement elle est remarquable par la justesse de la pensée et facilement accessible à l'esprit d'un commençant studieux. Parmi les innovations, je citerai encore dans

l'appendice, page 299, le binôme de Newton exposé par l'Arithmétique et très simplement; enfin, l'emploi de l'échiquier pour des questions relatives aux combinaisons, méthode ingénieuse et simple puisée dans les travaux de M. *Delannoy* et de notre regretté ami *Ed. Lucas*.

L'ouvrage se termine par 234 exercices intéressants mais beaucoup plus difficiles, pour la plupart, que ceux qui terminent les chapitres; les élèves qui les résoudront seront ceux qui auront bien réellement profité de la doctrine exposée dans le corps du volume.

En résumé, le livre de MM. L. et P. est un *excellent* ouvrage à la fois pratique et philosophique Il n'est l'abrégé d'aucun autre, son caractère personnel lui donne une place, bien à lui, parmi les nombreux écrits sur l'Algèbre élémentaire, et nous croyons même qu'il deviendra le type et le modèle d'autres ouvrages d'initiation scientifique; il ne contient pas de longs développements sur les applications; il laisse beaucoup à faire au lecteur, cherchant à élargir et à exciter son esprit, n'insistant, comme l'indique le titre, que sur les principes et ouvrant à l'élève studieux une route facile que celui-ci devra ensuite poursuivre de lui-même.

E. Lemoine.

AGRÉGATION

DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(Section des Sciences mathématiques). — Concours de 1892.

Algèbre et trigonométrie.

Soit ABC un triangle équilatéral; sur BC, comme diamètre, on décrit une circonférence Δ, et, sur Δ, à l'intérieur du triangle ABC, on prend un point M.

1° Ayant posé

$$BAM = \alpha, \qquad ABM = \beta,$$

on propose de trouver la relation qui existe entre tang α et tang β.

2° Trouver quelles sont les positions du point M, sur Δ, pour lesquelles $\alpha = 2\beta$.

3° Démontrer que, si, de M, on abaisse des perpendiculaires x, y, z, respectivement sur les côtés BC, CA, AB, on a

$$x^2 = xy + xz + 2yz,$$

et trouver le maximum du produit xyz.

4° Les symétriques des droites AM, BM, CM, par rapport aux hauteurs du triangle ABC, se coupent en un point M'.

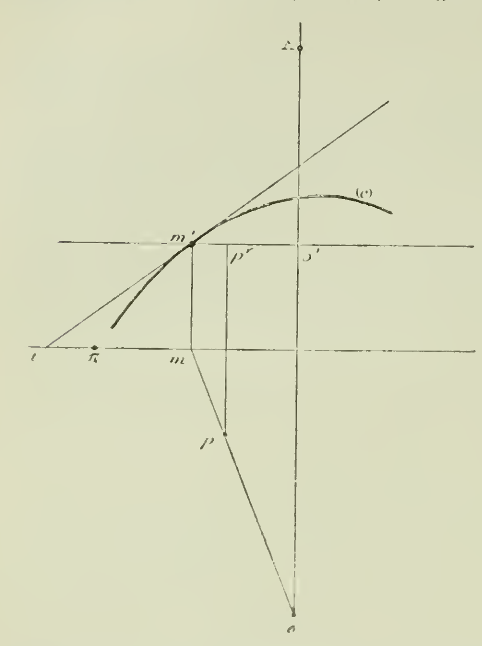
Soit x' la distance de ce point, au côté BC.

Trouver le maximum de x'.

Géométrie descriptive.

Une courbe C est tracée dans le plan vertical de projection; une verticale Δ se projetant au point O sur le plan horizontal de projection sert de

directrice à un conoïde dont les génératrices sont horizontales, et s'appuient sur la courbe C. Soit $(mo, m'o')$ une génératrice de cette surface, qui coupe au point (m, m') la courbe C et au point (o, o') la droite Δ, et appelons t la trace sur la ligne de terre de la tangente m à la courbe C au point (m, m'). En un point arbitraire (p, p'), pris sur la génératrice considérée, on mène le plan tangent au conoïde; ce plan coupe en un point π la ligne de terre.



1° Prouver que, en vertu du théorème de Chasles sur la distribution des plans tangents dans les surfaces gauches, il existe une relation simple entre les segments πt, πm, $p'm'$, $p'o'$.

2° Déduire de cette relation la construction de la courbe de contact du conoïde avec un cône circonscrit ayant son sommet A dans le plan vertical de projection.

3° Construire *par points* la trace de ce cône sur le plan horizontal de projection. On fera les raisonnements en supposant la courbe C quelconque; mais dans l'épure on choisira pour C une demi-circonférence dont le diamètre-limite sera la ligne de terre. La droite Δ sera dans un même plan de profil avec le centre de ce cercle, et à une distance du plan vertical (en avant) égale au diamètre de ce cercle. Enfin, le point A sera sur une même verticale avec le centre du cercle, à une distance au-dessus de la ligne de terre égale aussi au diamètre.

Une rédaction très détaillée doit accompagner l'épure.

Mécanique.

Une roue hydraulique, montée sur un arbre dont l'axe est horizontal, porte vingt palettes planes, dont les plans passent par l'axe de l'arbre.

La roue est mise en mouvement par un cours d'eau dans lequel plongent les palettes inférieures.

La surface de l'eau est à 1 mètre au-dessous de l'axe de la roue, et la vitesse du cours d'eau est égale à 1 mètre par seconde.

Les palettes sont des rectangles dont les grands côtés ont 0^m20 et les

petits côtés 0^m05. Les grands côtés sont parallèles à l'axe de la roue, et le plus rapproché de cet axe en est distant de 1 mètre.

Sur l'axe de la roue est calée une poulie sur laquelle s'enroule une corde à l'extrémité de laquelle est un poids de 5 kilogrammes que l'action de l'eau sur la roue tend à faire remonter. Le rayon de la poulie est égal à 0^m10.

On demande de calculer approximativement, avec quelle vitesse et dans quel sens tournera la roue. On évaluera cette vitesse en nombre de tours à la minute.

On fera le calcul en admettant que la pression P de l'eau, sur une surface plane, est donnée en kilogrammes par la formule

$$P = 125AV^2,$$

dans laquelle A exprime en mètres carrés l'aire de la surface, et V exprime en mètres par seconde la composante normale à la surface de la vitesse relative de l'eau par rapport à la surface.

On négligera les frottements des tourillons de l'arbre sur les coussinets et, en général, toute résistance passive.

Nota. — On aura une première approximation en supposant que la pression de l'eau sur la roue est constante et égale à la préssion développée par l'eau lorsque l'une des palettes est verticale. On pourra supposer de plus qu'alors la pression est la même sur toute la palette et égale à la pression développée snr le centre de gravité.

Les candidats tâcheront ensuite d'approcher davantage du résultat : par exemple, en cherchant une limite inférieure et une limite supérieure de la valeur de la pression, ce qui leur permettra de comprendre la vitesse demandée entre deux nombres qui lui seront, l'un inférieur, l'autre supérieur.

Ces indications ne sont données qu'à titre de renseignement; les candidats faciliteront, comme il leur plaira, leurs calculs d'approximation. Mais on leur demande de montrer nettement en quoi leurs calculs approchés diffèrent des calculs exacts.

CERTIFICAT D'APTITUDE

A L'AGRÉGATION

Arithmétique et algèbre.

I. Une personne verse dans une banque, pendant n années de suite, au commencement de chaque année, des sommes respectivement égales aux termes consécutifs d'une progression arithmétique croissante commençant par a et ayant pour raison h. A la fin de la n^{me} année, la somme due par la banque à cette personne est le double de ce qu'elle serait si tous les versements avaient été égaux entre eux et chacun d'eux égal à a.

1° En tenant compte des intérêts simples, au taux r par franc par an, calculer h en fonction de a, n et r.

Application numérique : $a = 1000$; $r = 0.04$; $n = 20$.

2° Même question et même application numérique en tenant compte des intérêts composés, au taux r par franc par an, les intérêts se capitalisant tous les ans.

II. Exposer comment, au moyen de la dérivée, on étudie les variations d'une fonction explicite d'une seule variable.

Application. Dans un plan P on donne un point A et un cercle de centre O et de rayon r. Un point S de l'espace se projette orthogonalement sur le plan P en un point B situé au milieu de OA ; on donne $SB = h$ et $AO = a$. Par le point A on trace, dans le plan P, une sécante AMN qui rencontre le cercle O aux points M et N, que l'on joint au point S. Le triangle SMN en tournant autour de MN comme charnière engendre un volume V.

Étudier les variations de ce volume V lorsque la sécante AMN tourne dans le plan P autour du point A.

Donner un tableau récapitulatif de ces variations.

Géométrie et Mécanique.

I. Un cône a pour trace sur le plan horizontal de projection une ellipse E ; ce cône est circonscrit à une sphère O qui est en outre tangente au plan horizontal de projection et au-dessus de ce plan. On donne l'ellipse E en grandeur et position ainsi que la cote h du sommet du cône au-dessus du plan horizontal de projection.

1° Construire les projections horizontale et verticale du sommet S du cône et celles de la sphère O ;

2° Construire les projections horizontale et verticale de la ligne L de contact du cône et de la sphère ;

3° Trouver sur cette ligne L un point tel que la tangente en ce point à cette ligne fasse avec le plan horizontal un angle donné α.

Données numériques : h $= 64$ millimètres ; $\alpha = 22°,5$; l'ellipse E a un grand axe de 120 millimètres de longueur et une distance focale de 73 millimètres, la direction du grand axe fait un angle de 45 degrés avec la ligne de terre, l'ouverture de cet angle étant dirigée en avant de la ligne de terre et vers la droite de la feuille ; le prolongemaut du grand axe rencontre la ligne de terre en un point situé à 35 millimètres à gauche du milieu de celle-ci ; le centre de l'ellipse E est à 70 millimètres de la ligne de terre et en avant de cette ligne.

Nota. Joindre à l'épure une légende explicative.

II. Dans un plan on donne un cercle O de rayon r et une droite indéfinie OX passant par son centre. L'extrémité A d'une droite AB de longueur invariable se meut sur la circonférence O d'un mouvement

uniforme de vitesse angulaire ω pendant que l'extrémité B se déplace sur OX. ($AB = a$; $a > r$.)

1° Trouver les formules permettant de calculer la vitesse du point B à un instant donné et pour une position donnée du point A. (On prendra pour origine des temps l'instant où le point A est en A_0.)

2° Trouver l'équation dont la résolution ferait connaître la position A_1 occupée par le point A lorsque la vitesse du point B est maximum.

Discuter cette équation.

En appelant A_2 la position du point A pour laquelle la droite AB est tangente au cercle O, dire les positions respectives des points A_1 et A_2.

3° Résoudre l'équation précédente, et placer le point A_1 sur la circonférence O, en supposant $a = 2r$.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CONCOURS DE 1892

On donne un cercle O, une tangente PQ à ce cercle et une droite D située dans le plan du cercle.

Déterminer sur la droite D un point A tel que les tangentes menées de ce point, au cercle O interceptent sur la droite PQ un segment BC de longueur donnée $2a$. — Reconnaître, pour chaque solution, si le cercle donné est inscrit dans le triangle ABC ou s'il est exinscrit, soit dans l'angle A, soit dans l'un des angles B ou C.

CONCOURS GÉNÉRAL

(Seconde 1892).

Résoudre les équations :

$$x + y + z = 1,$$
$$x + 9y + 25z = 10a,$$
$$x + 81y + 625z = 100b.$$

Déterminer, pour les nombres a *et* b, *des valeurs entières telles que les valeurs des inconnues soient positives.*

Géométrie.

On donne deux droites xx', yy', non situées dans un même plan, et sur xx' un point A, sur yy' un point B ; puis, on considère un plan fixe P passant par A et B et une droite mobile Δ parallèle à ce plan et rencontrant les droites données.

1° Si l'on désigne par C et D les points de rencontre de la droite Δ dans l'une quelconque de ses positions avec les droites xx' et yy' démontrer que le rapport $\frac{AC}{BD}$ a une valeur constante.

2° Démontrer qu'il y a deux plans P' et P'', tels que si le plan coïncide avec l'un deux, on a constamment $\frac{AC}{BD} = 1$.

3° Soit Δ' une parallèle au plan P' rencontrant xx' en C' et yy' en D'; soit de même Δ'' une parallèle au plan P'' rencontrant xx' en C'' et yy' en D''. On transporte les droites $\Delta'\Delta''$ parallèlement à elles-mêmes de manière à amener les points C' et C'' en un point donné O. Ces droites prennent les positions OM' et OM''; trouver le lieu géométrique de chacun des points M' et M'' quand les droites Δ' et Δ'' se déplacent.

4° Trouver le lieu du point milieu de M'M'' quand les droites Δ' et Δ'' se déplacent en restant perpendiculaires.

QUESTIONS PROPOSÉES

443. — Si $f + g + h = 1$, les équations

$$xyz\left[\frac{f}{x^2} + \frac{g}{y^2} + \frac{h}{z^2} - \left(\frac{f}{x} + \frac{g}{y} + \frac{h}{z}\right)^2\right]\sum\frac{x(y-z)^2}{f} = m,$$

$$\left[(fx + gy + hz)\left(\frac{f}{x} + \frac{g}{y} + \frac{h}{z}\right) - 1\right]\sum\frac{x^2(y-z)^2}{f} = m,$$

représentent des surfaces qui coïncident (*).

(E. Catalan.)

444. — L'égalité

$$-a'^4 - b'^4 - c'^4 + 2b'^2c'^2 + 2c'^2a'^2 + 2a'^2b'^2 =$$
$$[-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2]$$
$$\left[1 - \frac{az(b-y) + bx(c-z) + cy(a-x)}{abc}\right]$$

devient identique si l'on fait simultanément :

$$a'^2 = (b-y)^2 + z^2 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}(b-y)z,$$

$$b'^2 = (c-z)^2 + x^2 - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca}(c-z)x,$$

$$c'^2 = (a-x)^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}(a-x)y.$$

Exemple. Soient :

$$a = 7,\ b = 6,\ c = 5,\ x = 4,\ y = 5,\ z = 3;$$

d'où résultent $a'^2 = \frac{44}{5}$, $b'^2 = \frac{396}{35}$, $c'^2 = \frac{88}{7}$.

On doit trouver (après quelques réductions préliminaires) :

$$\frac{44 \cdot 9504}{1225} = 3456\left(\frac{11}{35}\right)^2;$$ ce qui est exact.

(E. Catalan.)

(*) Autrement dit, les premiers membres sont *identiquement* égaux.

445. — Si la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC rencontre en L le côté BC et en A′ la circonférence circonscrite et qu'on porte sur cette bissectrice, de part et d'autre de A, les longueurs AD, AD_1 égales chacune à la moyenne géométrique entre AL et AA′ : 1° Le quadrilatère DBD_1C est harmonique; 2° Si B′, C′, B_1, C_1 sont les points où DB, DC, D_1B, D_1C rencontrent la circonférence ABC, DB′A′C′, $D_1B_1A'C_1$ sont des parallélogrammes (Réciproque de la question 339); 3° Ces deux parallélogrammes sont semblables; 4° A′C est une symédiane du triangle $B_1A'B'$ et A′B du triangle $C_1A'C'$; 5° $B'B_1$, $C'C_1$ sont égaux et divisés chacun en deux parties égales par AA′; 6° des deux parallélogrammes semblables ont pour point autohomologue le milieu de A′C, ou le milieu de A′B, selon la manière dont on choisit les sommets homologues; 7° Les droites A′B′ et CD_1; A′C′ et BD_1, $A'B_1$ et CD, $A'C_1$ et BD se rencontrent sur la droite qui joint les milieux de A′B et A′C; 8° Les circonférences circonscrites à DCC_1, D_1CC' se coupent sur le milieu de A′C et, de même, les circonférences DBB_1, D_1BB' sur le milieu de A′B. *(Bernès.)*

446. — De part et d'autre du point A, commun à deux circonférences O, O′, on porte sur le rayon AO, de l'une, deux longueurs égales AL, AM ; et, des points L et M comme centres, avec LA, MA pour rayons, on trace deux circonférences qui coupent la circonférence O en B′ et C′. Si B et C sont les points où AB′, AC′ rencontrent la circonférence O, et que AD soit une corde de O, tangente à O′, et AD′ une corde de O′, tangente à O, démontrer que chacun des quadrilatères ABCD, AB′C′D′ est harmonique. *(Bernès.)*

447. — Dans un même cercle, sont inscrits deux triangles ABC, A′B′C′ qui ont les angles en A supplémentaires et de sens contraires compris entre côtés homologues proportionnels : $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC'}{AC}$. 1° Démontrer que les symédianes issues de A dans les deux triangles sont symétriques relativement au rayon AO; 2° que si, par A, on trace Ax parallèle à BC, Ax' parallèle à B′C′, les médianes issues de A dans les deux triangles sont

antiparallèles relativement à l'angle xAx'; 3° étant donné l'un des trianlges, construire l'autre. *(Bernès.)*

448. — Si, entre les côtés AB, AC d'un triangle ABC, on trace DE parallèle à BC, et FG, anti-parallèle relativement à l'angle A, l'axe radical des circonférences BEG, CDF est indépendant de la position de DE; il coïncide avec la droite qui joint A à la rencontre des droites BG, CF.

(Bernès.)

449. — Si, sur AB, on prend deux points quelconques D, D′ et sur AC deux autres points quelconques E, E′, dans quel rapport l'axe radical des circonférences BEE′, COD′ divise-t-il BC et dans quel rapport divise-t-il la médiane AM?

Montrer que si B′ divise CA dans un rapport représenté en grandeur et signe par $\frac{CE.CE'}{AE.AE'}$, et si C′ divise CA dans le rapport $\frac{BD.BD'}{AD.AD'}$, le même axe radical passe par la rencontre de BB′ et CC′. *(Bernès).*

ERRATA

1° La question 429 n'est pas une question. C'est la définition même du Cercle de Lemoine. Le texte a, par erreur, été détaché de la question 427, p. 144. Là, il était à sa place pour rappeler la définition de ce Cercle.

A propos de cette question 432, une erreur typographique est à signaler. A la deuxième ligne, il faut *se coupent* au lieu de *se comptent*.

Enfin, le numérotage des questions du dernier numéro doit être corrigé. Page 144, on a mis 427 à une question qui devait porter le 437. Cette erreur s'est continuée dans le numéro de juillet et les questions 428... 432, doivent porter les nos 438, 439, 440, 441, 442.

Les solutions de ces questions, pour éviter toute erreur, devront porter le titre suivant: question 438 (marquée, par erreur, 428, p. 168), etc.

La question marquée 429 est annulée.

2° Page 163, ligne — 2, au lieu de *projections*, lisez *positions*;

Pages 164, 165, les figures doivent être permutées et la note de la page 164 est alors à supprimer.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16348-7-92.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, voir page 169.)

XXV. **Coordonnées angulaires.** — Soient λ, μ, ν les coordonnées angulaires de M, λ_1, μ_1, ν_1, celles de m. Proposons-nous d'exprimer celles-ci en fonction des premières.

Lemme. — Si α, β, γ sont les coordonnées barycentriques de M, on a

$$M_0 = \alpha(\cot g\,\lambda - \cot g\,A) = \beta\,(\cot g\,\mu - \cot g\,B) = \gamma(\cot g\,\nu - \cot g\,C),$$

où l'on suppose qu'un même sens de rotation, le sens ABC, est adopté pour définir à la fois le sens positif des aires et le sens positif des angles. Soit, à établir en grandeur et en signe, la relation

$$M_0 = \alpha(\cot g\,\lambda - \cot g\,A).$$

Appelons K le point où CM rencontre la circonférence ABC, L la projection de B sur CK. En grandeur et en signe, on a

$$M_0 = MC.MK = MC(ML - KL).$$

Prenons, pour sens positif des longueurs comptées sur KC, le sens qui va d'un point situé sur cette droite du même côté de BC que A au point C. Alors, comme la coordonnée barycentrique α, c'est-à-dire l'aire MBC est positive lorsque M est du même côté de BC que A, on voit que α aura toujours le signe de MC. Par suite, BL étant pris en valeur absolue, on a $\alpha = BL.MC$. D'autre part, $\cot g\,\lambda$ est positive ou négative selon que la plus petite valeur positive de λ est $< \frac{\pi}{2}$ ou $> \frac{\pi}{2}$. En supposant successivement K entre A et B, A et C, B et C; et, pour chacune de ces positions de K, M situé de part et d'autre de L sur CK, on voit que ML a toujours le signe de $\cot g\,\lambda$. De même, KL celui de $\cot g\,A$; de sorte que, BL étant encore pris en valeur absolue, on a

toujours

$$\frac{ML}{BL} = \operatorname{cotg} \lambda, \quad \frac{KL}{BL} = \operatorname{cotg} A.$$

Étant faites ces remarques, qui n'ont pour objet que de rendre la démonstration générale, la formule est intuitive :

$$M_0 = MC(ML - KL) = BL.MC\left(\frac{ML}{BL} - \frac{KL}{BL}\right).$$

ou

$$M_0 = \alpha(\operatorname{cotg} \lambda - \operatorname{cotg} A).$$

En désignant par D, D_1, D_2 les trois différences

$$\operatorname{cotg} \lambda - \operatorname{cotg} A, \operatorname{cotg} \mu - \operatorname{cotg} B, \operatorname{cotg} \nu - \operatorname{cotg} C;$$

on a donc

$$M_0 = \alpha D = \beta D_1 = \gamma D_2 = \frac{2S}{\frac{1}{D} + \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}} = \frac{2S\ DD_1D_2}{\sum D_1D_2}.$$

On a ainsi l'expression de M_0, en fonction des coordonnées angulaires de M. Les égalités

$$\lambda + \mu + \nu = 0, A + B + C = 0$$

donnent d'ailleurs

$$\sum D_1D_2 + \sum D(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C) = 0$$

Le sens ABC étant pris pour sens des angles positifs. $\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$ est égal, en grandeur et en signe, à

$$\frac{BH_a + H_aC}{h}, \quad \text{ou} \quad \frac{a^2}{2S};$$

et $\sum D_1D_2$ peut se remplacer par $-\frac{\sum a^2D}{2S}$; de sorte que

$$M_0 = -\frac{4S^2DD_1D_2}{\sum a^2D}.$$

On peut le déduire aussi de

$$\frac{M_0}{2R} = -\frac{\sum aYZ}{2S}.$$

De ce lemme, résulte

$$\operatorname{cotg} \mu_1 - \operatorname{cotg} B = \frac{M_0}{by}.$$

Or $\dfrac{X}{\left(\dfrac{m_0}{2R}\right)} \quad \dfrac{Y}{z} = \dfrac{Z}{y}$, d'où $\dfrac{M_0}{by} = \dfrac{2RX}{bZ} = \dfrac{2Rc}{ab} \cdot \dfrac{aX}{cZ}$,

ou $$\frac{m_0}{by} = \frac{c^2}{2S} \cdot \frac{aX}{cZ} = \frac{c^2}{2S} \cdot \frac{\cot \nu - \cot C}{\cot \lambda - \cot A}.$$

On a donc ainsi les trois relations

$$\lambda_1 = A - \lambda,$$

$$\cot \mu_1 = \cot B + \frac{c^2}{2S} \cdot \frac{\cot \nu - \cot C}{\cot \lambda - \cot A},$$

$$\cot \nu_1 = \cot C + \frac{b^2}{2S} \cdot \frac{\cot \mu - \cot B}{\cot \lambda - \cot A}.$$

Si, de même que D, D_1, D_2 désignent les trois différences

$$\cot \lambda - \cot A, \ \cot \mu - \cot B, \ \cot \nu - \cot C,$$

on désigne par d, d_1, d_2 les différences

$$\cot \lambda_1 - \cot A, \ \cot \mu_1 - \cot B, \ \cot \nu_1 - \cot C,$$

les deux dernières relations peuvent s'écrire abréviativement :

$$d_1 = \frac{c^2}{2S} \cdot \frac{D_2}{D}, \qquad d_2 = \frac{b^2}{2S} \cdot \frac{D_1}{D}.$$

On obtient des formules symétriques, relativement aux points M et M_1, en observant que $\lambda_1 + \lambda = A$ équivaut à $d.D = \dfrac{4R^2}{a^2}$; d'où

$$\frac{ad}{2R} = \frac{bd_1}{c.D_2} = \frac{cd_2}{b.D_1} = \frac{2R}{aD}.$$

Démonstration directe. — La même question peut être résolue plus directement, comme il suit. Considérons d, d_1, d_2 comme trois coordonnées liées par la condition $\sum d_1.d_2 + \sum \dfrac{a^2 d}{2S} = 0$. L'équation $d = \dfrac{4R^2}{a^2 D}$ définit le cercle mBC, et l'équation

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{D_1}{D_2},$$

qui équivaut à $\dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{y}$, définit la droite A$m$, isogonale de AM. Cette droite et ce cercle se coupent en m et au point M′, isogonal de M. C'est donc à ces points que se rapportent les deux racines de l'équation du deuxième degré en d_1,

obtenue par l'élimination de d_2, équation dont le premier terme est $\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{D_1}{D_2}\,d_1^2$ et qui a pour terme indépendant $\frac{a^2d}{2S}$ ou $\frac{4R^2}{2S.D}\cdot$

Le produit des racines y est donc $\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{4R^2}{2S}\cdot\frac{D_2}{DD_1}\cdot$ Mais, pour M′, on a $\mu_1 = B - \mu$; par conséquent $d_1 = \frac{4R^2}{b^2D_1}$, l'autre racine, celle qui se rapporte à m, est donnée par

$$d_1 = \frac{c^2}{2S}\cdot\frac{D_2}{D}\cdot$$

De là résulte
$$d_2 = \frac{b^2}{2S}\cdot\frac{D_1}{D}\cdot$$

XXV *bis*. — Nous compléterons ce chapitre par quelques relations qui se rattachent à notre étude.

1° Relations entre les coordonnées normales X, Y, Z; x′, y′ z′ *de deux points isocycliques* M, m′.

Indirectement on peut, d'après le § XXIV, exprimer x', y', z' en fonction de X′, Y′, Z′ et par suite en fonction de X, Y, Z. Directement, on démontre sans peine que $x'X = -\frac{bc.YZ}{AM^2}$, après quoi l'on a

$$\frac{y'}{Y} = \frac{z'}{Z} = \frac{2S - ax'}{2S - aX}\cdot$$

2° Relations entre les coordonnées angulaires des deux mêmes points (λ, μ, ν; λ_1', μ_1', ν_1').

Indirectement, on a $\mu_1' = B - \mu_1$, $\nu_1' = C - \nu_1$ ce qui permet d'exprimer cotg μ_1' et cotg ν_1' en fonction de cotg λ, cotg μ, cotg ν. D'ailleurs $\lambda_1' = \lambda$.

Directement, en raisonnant comme dans la seconde recherche de d_1 et d_2, on voit que si d_1' et d_2' désignent les différences cotg μ_1' — cotg B, cotg ν_1' — cotg C.

On a

$$\frac{d_1'}{D_1} = \frac{d_2'}{D_2} = \frac{a^2D}{2S.D_1D_2}\cdot$$

3° Points complémentaires. — Relations entre les coordonnées normales x, y, z, x_1, y_1, z_1 *de deux points* M, N *dont les coordonnées ont des sommes données* λ, μ, ν.

Les coordonnées angulaires de N étant λ_1, μ_1, ν_1, celles de M sont $\lambda - \lambda_1$, $\mu - \mu_1$, $\nu - \nu_1$. Donc

$$M_0 = ax[\cotg(\lambda - \lambda_1) - \cotg A] = ax\frac{(\cotg\lambda - \cotg A)\cotg\lambda_1 + 1 + \cotg A \cotg\lambda}{\cotg\lambda_1 - \cotg\lambda}$$

$$= 2Rx\frac{\sin(2A - \lambda) + \dfrac{N_0\sin(A - \lambda)}{2Rx_1}}{-\sin(A - \lambda) + \dfrac{N_0\sin\lambda}{2Rx_1}}.$$

Puis

$$\frac{M_0}{2R} = \frac{x\left[\sin(2A - \lambda) + \dfrac{N_0\sin(A - \lambda)}{2Rx_1}\right]}{-\sin(A - \lambda) + \dfrac{N_0\sin\lambda}{2Rx_1}}$$

$$= \frac{y\left[\sin(2B - \mu) + \dfrac{N_0\sin(B - \mu)}{2Ry_1}\right]}{-\sin(B - \mu) + \dfrac{N_0\sin\mu}{2Ry_1}}$$

$$= \frac{z\left[\sin(2C - \nu) + \dfrac{N_0\sin(C - \nu)}{2Rz_1}\right]}{-\sin(C - \nu) + \dfrac{N_0\sin\nu}{2Rz_1}}$$

(Dans cette question et les suivantes du même paragraphe, on supposera A, B, C compris entre zéro et π.)

Sous forme symétrique, on a

$$\left(\frac{M_0}{2Rx} + \frac{N_0}{2Rx_1}\right)\sin(A - \lambda) - \frac{M_0N_0}{4R^2xx_1}\sin\lambda + \sin(2A - \lambda) = 0,$$

et deux autres pareilles.

Points isoptiques. — Si M et N sont isoptiques, λ, μ, ν sont nuls, et l'on a

$$\frac{M_0}{2Rx} + \frac{N_0}{2Rx_1} = -2\cos A, \qquad \frac{M_0}{2Ry} + \frac{N_0}{2Ry_1} = -2\cos B,$$

$$\frac{M_0}{2Rz} + \frac{2Rz_1}{N_0} = -2\cos C.$$

ou

$$x\left[2\cos A + \frac{N_0}{2Rx_1}\right] = y\left[2\cos B + \frac{N_0}{2Ry_1}\right] = z\left[2\cos C + \frac{N_0}{2Rz_1}\right]$$

Points conjugués. — Si M et N sont conjugués, λ, μ, ν sont

égaux à 2A, 2B, 2C, et l'on a

$$\frac{2Rx}{M_0} + \frac{2Rx_1}{N_0} = -2\cos A,$$
$$\frac{2Ry}{M_0} + \frac{2Ry_1}{N_0} = -2\cos B,$$
$$\frac{2Rz}{M_0} + \frac{2Rz_1}{N_0} = -2\cos C;$$

ou $$\frac{x}{x_1 + \frac{2N_0\cos A}{2R}} = \frac{y}{y_1 + \frac{2N_0\cos B}{2R}} = \frac{z}{z_1 + \frac{2N_0\cos C}{2R}}.$$

Ces formules peuvent se déduire de celles qui se rapportent aux points isoptiques. Car en substituant, à deux points isoptiques, leurs isogonaux, on obtient deux points conjugués. Or, comme pour deux points isogonaux M, M' on a $\frac{M_0M'_0}{4R^2xx'} = 1$, pour passer de l'un à l'autre, il faut remplacer $\frac{M_0}{2Rx}$ par $\frac{2Rx'}{M'_0}$.

4° *Relations entre les coordonnées normales de deux points* M, N *dont les coordonnées angulaires ont des différences données* λ, μ, ν,

$$\alpha - \alpha_1 = \lambda, \quad \beta - \beta_1 = \mu, \quad \gamma - \gamma_1 = \nu.$$

Cette question peut être traitée directement comme la précédente. Mais on peut aussi l'en déduire.

Si N' étant l'isogonal de N, α', β', γ' désignent ses coordonnées angulaires, on aura

$$\alpha + \alpha' = \lambda + A, \quad \beta + \beta' = \mu + B, \quad \gamma + \gamma' = \nu + C.$$

Les relations entre les coordonnées normales x, y, z de M et les coordonnées x', y', z de N' s'obtiendraient donc en remplaçant λ, μ, ν par $A + \lambda$, $B + \mu$, $C + \nu$ dans les formules de 3°. Et pour revenir du point N' à son isogonal, il faudra remplacer $\frac{N'_0}{2Rx'}$ par $\frac{2Rx_1}{N_0}$, etc. De là donc la relation

$$\left(\frac{M_0}{2Rx} + \frac{2Rx_1}{N_0}\right)\sin\lambda + \frac{M_0}{2Rx} \times \frac{2Rx_1}{N_0}\sin(A+\lambda) - \sin(A-\lambda) = 0,$$

ou, en multipliant par $\frac{N_0}{2Rx_1}$,

$$\frac{M_0.N_0}{4R^2xx_1}\sin\lambda+\frac{M_0}{2Rx}\sin(A+\lambda)-\frac{N_0}{2Rx_1}\sin(A-\lambda)+\sin\lambda=0,$$

et deux autres pareilles.

5° A signaler les relations mixtes

$$\frac{x.AM}{x_1.AN}=\frac{yBM}{y_1BN}=\frac{zCM}{z_1CN},$$

où M, N, sont deux points isoptiques. Elles résultent de ce que les isogonaux M′, N′ de M étant conjugués on a,

$$\frac{AM'}{AN'}=\frac{BM'}{BN'}=\frac{CM'}{CN'},$$

et que d'ailleurs $\dfrac{AM'}{x.AM}=\dfrac{BM'}{y.BM}=\dfrac{CM'}{z.CM}$,

et $\dfrac{AN'}{x_1.AN}=\dfrac{BN'}{y_1.BN}=\dfrac{CN'}{z.CN}$.

6° Voici, pour terminer, quelques formules relatives aux coordonnées tripolaires :

I. Si l'on pose

$$\frac{\overline{AM}^2}{bc}=U,\quad\frac{\overline{BM}^2}{ca}=V,\quad\frac{\overline{CM}^2}{ab}=W,$$

les coordonnées normales x, y, z s'expriment en fonction de U, V, W par l'égalité

$$\frac{x}{R}=-U+V\cos C+W\cos B+\cos A,$$

et par deux autres pareilles.

II. Les trois coordonnées U, V, W sont liées par la condition

$$1-2\sum U\cos A+\sum(U^2-2VW\cos A)=0.$$

III. La distance δ de deux points est donnée par

$$\frac{\delta^2}{R^2}=\sum[(U-U_1)^2-2(V-V_1)(W-W_1)\cos A].$$

Les termes du second degré en U, V, W et ceux du second degré en U_1, V_1, W_1 peuvent disparaître au moyen de la relation précédente.

IV. Les relations entre les coordonnées (U, V, W), (u, v, w) de deux points symétriquement inverses M, m sont

$$\frac{u}{1}=\frac{v}{W}=\frac{w}{V}=\frac{1}{U}.$$

Elles résultent de celles qui ont été indiquées au début de ce chapitre.

V. L'équation linéaire $lU + mV + nW = p$, représente un cercle, qui se réduit à une droite lorsque $\sum .al = 0$. Ce cercle passe en A si $ap = bn + cm$.

Le cercle symétriquement inverse a pour équation

$$pu - nv - mw = l.$$

Comme exemple : l'équation

$$2 \sum U \cos A = 1 + \frac{\rho^2}{R^2}$$

représente un cercle de rayon ρ concentrique au cercle ABC.

L'équation $$\sum U = 1 + \frac{\rho^2}{2Rr}$$

est celle d'un cercle de rayon ρ, concentrique au cercle inscrit dans le triangle ABC.

Un cercle de rayon ρ, ayant pour centre I_a, aurait pour équation

$$V + W - U = -1 + \frac{\rho^2}{2R.r_a}.$$

Ce sont des cas particuliers de l'équation remarquable

$$\sum \alpha U = 1 + \frac{\rho^2}{abc} \sum a\alpha,$$

qui représente un cercle de rayon ρ, dont le centre a pour coordonnées α, β, γ dans un système qui sera exposé plus tard. Le cercle des neuf points a pour équation

$$\sum .U \cos (B - C) = 1 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

VI. Les cercles qui sont leurs propres transformés sont compris dans les deux équations

$$l(U - 1) + m(V - W) = 0,$$
$$l(U + 1) + m(V + W) = 0.$$

La première, comprend les cercles ayant pour axe radical avec le cercle décrit sur I_bI_c comme diamètre est la droite AII_a; la seconde, les cercles ayant avec le cercle décrit sur II_a comme diamètre, pour axe radical la droite AI_bI_c; ce sont deux séries orthogonales (*). *(A suivre.)*

(*) Propriété signalée dans le mémoire de M. Gob, déjà cité.

NOTE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

SUR LES SECTIONS PLANES DES CÔNES.

Par M. **Aug. Morel**, professeur à l'École Lavoisier.

I

Dans le problème de la section plane du cône, on est constamment amené à tracer la tangente à la section, soit en un point de cette courbe, soit parallèlement à une direction donnée; cette dernière ligne est dans le plan sécant, puisque la tangente à la courbe est dans ce plan. Je rappelle la construction :

Ayant mené au cône un plan tangent parallèle à la direction donnée, son intersection avec le plan sécant est la tangente cherchée, laquelle touche la courbe sur la génératrice de contact. Le plan tangent tracé passe par la parallèle à la direction donnée menée par le sommet du cône. Or, le lieu géométrique des droites menées par un point, parallèlement à un plan, est le plan, parallèle au précédent, passant par le point. De là résulte que, au lieu de chercher la tangente parallèle à une direction donnée du plan sécant, il suffit de mener, par le sommet du cône, un plan parallèle au plan sécant; puis, dans ce plan, par le sommet, on mène une droite quelconque; le plan tangent qui passe par cette droite, coupe le plan sécant suivant une tangente à la courbe d'intersection et cette tangente est parallèle à la droite considérée.

Il suffit de déterminer la trace horizontale du plan auxiliaire ainsi tracé, en supposant la trace du cône dans le plan horizontal. Soit x_1y_1 la trace du plan mené par le sommet, parallèlement au plan sécant dont la trace est xy, parallèle à x_1y_1. Soit $s\beta_1$ la projection horizontale d'une droite du plan; elle rencontre en β_1 la droite x_1y_1; par β_1, je mène une tangente β_1c, qui touche la courbe en c, et rencontre xy en β; sc est la projection de la génératrice de contact; par β, je mène βm

parallèle à $s\beta_1$, et coupant sc en m; βm est la tangente et m est le point de contact.

On voit facilement de cette façon que l'on obtient :

Les tangentes horizontales, correspondant au cas où $s\beta_1$ est parallèle à x_1y_1, et par suite les traces des plans tangents aussi parallèles à x_1y_1;

Les tangentes de front, lorsque $s\beta_1$ est parallèle à la ligne de terre;

Les tangentes de profil si, $s\beta_1$ est lui-même de profil.

D'une façon générale, on pourrait se proposer de mener autant de tangentes que l'on voudrait, et de déterminer ainsi la courbe par ses tangentes, d'une façon très rapide.

On peut aussi se proposer de mener à la projection horizontale une tangente parallèle à une droite donnée du plan horizontal, en considérant cette droite comme la projection horizontale d'une droite du plan Sx_1y_1.

Ce que nous avons dit pour la projection horizontale serait encore vrai pour la projection verticale; si l'on se donne d'avance la direction, menée par s', d'une tangente à la projection verticale de la courbe, en considérant cette droite $s'\gamma'_1$ comme la projection verticale d'une droite du plan Sx_1y_1; on détermine sa projection horizontale $s\gamma_1$, et l'on opère comme précédemment. On détermine ainsi d'abord la projection horizontale du point de contact, puis sa projection verticale, puisque l'on connaît la génératrice du cône sur laquelle il se trouve.

Ces constructions s'appliquent, sans restriction aucune, à un cône dont la directrice est, dans le plan horizontal, une courbe d'un degré quelconque. Autant, par un point β_1 pris sur x_1y_1, on pourra tracer de tangentes à la courbe de base, autant on pourra mener de tangentes à la section, tangentes ayant leurs projections horizontales parallèles à $s\beta_1$.

II

Supposons maintenant que la courbe de base, sur le plan horizontal, soit une conique quelconque, et cherchons à déterminer les propriétés de la courbe de section, ou plus exacte-

ment de ses projections. Rappelons seulement ici les propositions suivantes :

La section d'un cône analogue à celui qui est considéré, par un plan quelconque, est une conique qui se projette suivant une conique de même espèce. Cette courbe d'intersection sera :

une ellipse, lorsque le plan sx_1y_1 sera extérieur au cône;

une parabole, si le plan sx_1y_1 est tangent;

une hyperbole, si ce plan coupe le cône, c'est-à-dire lorsque x_1y_1 rencontrera la courbe de base.

Dans ce dernier cas, il y aura deux génératrices parallèles au plan sécant, donnant des points à l'infini; du reste, les génératrices voisines de l'une ou de l'autre de ces droites particulières, donneront des points d'intersection de plus en plus éloignés, dont la tangente s'obtiendra toujours par la méthode ordinaire, c'est-à-dire par l'intersection du plan tangent avec le plan sécant. A la limite, le plan tangent le long de la génératrice située dans le plan x_1y_1, coupe le plan sécant suivant une droite; cette droite est l'asymptote ou la tangente à l'infini.

En second lieu, je rappellerai qu'une section conique peut être considérée comme la projection centrale d'un cercle, et que les propriétés des pôles et des polaires se conservent en projection centrale. En particulier, la polaire d'un point d'une droite passe par le pôle de cette droite.

Cela posé, considérons la base du cône, sur le plan horizontal; soient s la projection horizontale du sommet, xy la trace d'un plan sécant, x_1y_1 celle du plan parallèle mené par le sommet; et proposons-nous de mener des tangentes parallèles à la droite projetée suivant $s\beta_1$; ces tangentes se projetteront elles-mêmes suivant des parallèles à $s\beta_1$, tangentes à la projection horizontale. Traçons $\beta_1\beta b$, et $\beta_1\gamma c$ tangentes à la courbe; ces lignes rencontrent xy en β et γ; menons βm, γn parallèles à $s\beta_1$, et rencontrant les génératrices sb et sc en m et n. D'après ce qui a été dit plus haut pour un cône quelconque, nous avons les tangentes demandées; m et n sont leurs points de contact.

Traçons la polaire du point β_1, c'est-à-dire la ligne de con-

tact dc; elle rencontre xy en r, et $x_1 y_1$ en h_1; menons sh_1, et observons que, par les constructions faites, nous avons

$$\frac{cn}{cs} = \frac{c\gamma}{c\beta_1} = \frac{cr}{ch_1};$$

cette dernière proportion résulte du parallélisme des xy et de $x_1 y_1$.

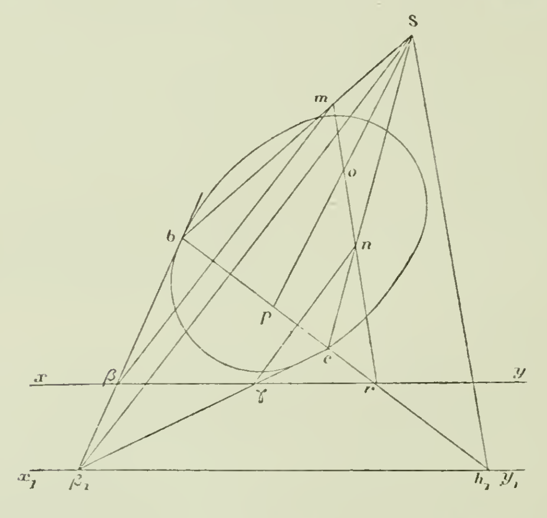
Ainsi rn est parallèle à sh.

Nous avons aussi, pour les mêmes raisons que tout à l'heure,

$$\frac{bm}{bs} = \frac{b\beta}{b\beta_1} = \frac{br}{bh_1};$$

donc rm est aussi parallele à sh_1; nous arrivons donc à la conclusion suivante :

La polaire de β_1 *rencontrant* xy *en* r, *et* x_1y_1 *en* h_1, *la ligne qui joint*



les points de contact passe par le point r, *et est parallèle à* sh_1.

De plus, si p désigne le pôle de x_1y_1 et que l'on trace sp_1 rencontrant mn en o, on a

$$\frac{po}{ps} = \frac{pr}{ph_1}.$$

Or, le point p étant fixe, ainsi que xy et x_1y_1, le rapport écrit dans le second membre est constant; o est donc fixe.

Enfin, le faisceau $(s, bcph_1)$ est harmonique; donc mn, parallèle à oh_1, est divisé en deux parties égales par le point o.

Cela étant vrai quelle que soit la direction de $s\beta_1$, et par suite de sh_1 qui en dépend, on voit que toute droite passant par le point o et terminée à la courbe, a son milieu en o, ce point est donc le centre de la courbe; mn est un diamètre.

Si je répéte les mêmes constructions en partant du point h_1, je trouverai de même les tangentes parallèles à sh_1; c'est à dire à mn; le diamètre correspondant sera parallèle à $s\beta_1$, car la polaire de h_1 est la ligne $\beta_1 p$, Par conséquent j'aurai de cette façon construit deux diamètres tels que chacun d'eux soit parallèle aux tangentes aux extrémités de l'autre; c'est un système de diamètres conjugués.

Dans la figure, on a supposé x_1y_1 extérieur à la courbe; auquel cas la section est une ellipse. Il serait facile de voir :

Que si x_1y_1 est tangent à la base, la polaire d'un point quelconque β_1 de x_1y_1 passant par le point de contact, quel que soit β_1, le point h_1 est fixe, et que par suite sh_1 est fixe; donc tous les diamètres sont parallèles à une même droite; de plus le centre est rejeté à l'infini; enfin on ne peut mener qu'une tangente parallèle à une direction donnée.

Que si x_1y_1 coupe la base, c'est-à-dire quand la courbe est une hyperbole, les points β_1 et h_1 sont conjugués harmoniques par rapport aux points f_1 et g_1 de rencontre avec la conique; si donc l'un d'eux est extérieur à la courbe, l'autre lui est intérieur; par suite il n'est pas possible de mener des tangentes par ce dernier point. Donc, dans ce cas, de deux diamètres conjugués, l'un rencontre la courbe et l'autre ne la rencontre pas. Lorsque β_1 est en f_1, il en est de même de h_1; mais la polaire de β_1 est la tangente en ce point; donc la droite sh_1 se confond avec sf_1; le diamètre parallèle n'est autre que la tangente au point situé à l'infini, c'est-à-dire l'asymptote. De plus, les deux asymptotes et un système quelconque de diamètres conjugués forment un faisceau harmonique.

III

Après avoir trouvé les points β_1 et h_1 qui nous permettent de déterminer un système de diamètres conjugués de

la projection horizontale, nous pouvons nous proposer de trouver les points B et H, tels que les diamètres conjugués correspondants soient rectangulaires. Pour cela, nous nous appuierons sur la proposition suivante :

Soit p *le pôle de* x_1y_1; *le diamètre la base qui passe par* p *rencontre* x_1y_1 *en* i_1; *quels que soient les points* β_1 *et* h_1; $i_1\beta_1 \times i_1h_1$ *est constant.*

Cette proposition est simple à démontrer géométriquement dans le cas où la courbe de base est un cercle; on en déduit la démonstration, dans le cas de l'ellipse, au moyen de la transformation par projections obliques (*). Sa démonstration analytique dans le cas d'une conique quelconque, est immédiate, en prenant les diamètres conjugués dont l'un passe par p. (*Voir les exercices de Géométrie analytique de Rémond*, 1re partie, p. 220.)

D'après cela, nous avons vu que, si nous traçions $s\beta_1$ et sh_1, ces lignes étaient parallèles à un système de diamètre conjugués. Il faut donc chercher les points B et H pour lesquels l'angle BsH est droit (**). Or le point s étant fixe, ainsi que le pied i_1 du diamètre conjugué de x_1y_1 dans la courbe de base, si je mène la droite si_1, qui est alors fixe, et la circonférence passant par β_1, s et h_1, cette courbe rencontre si_1 en un point fixe k, d'après le théorème précédent. Si donc, par le milieu de sk, on mène une perpendiculaire rencontrant x_1y_1 en Z, la circonférence décrite de Z comme centre et passant par s rencontre x_1y_1 aux points B et H. On aura donc la direction du système de diamètres conjugués rectangulaires de la projection horizontale lesquels sont respectivement parallèles à sB et sH.

IV

Nous avons considéré la projection horizontale de la section plane, et, d'après les propriétés des projections parallèles, un système de diamètres conjugués de la projection horizontale

---

(*) *Méthode de transformation par projections obliques*, par M. A. Jullien Paris, librairie Fourneau.

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

est la projection d'un système de diamètres conjugués de la section dans l'espace.

Il en résulte que, si nous projetons les points β_1 et h_1 sur la ligne de terre en β_1' et h_1', les droites $s'\beta_1'$, $s'h_1'$ sont parallèles à un système de diamètres conjugués de la projection verticale. Or, si je projette de même en i_1' le point i_1, et que j'appelle α l'angle de x_1y_1 avec la ligne de terre, j'ai

$$i_1\beta_1' = i_1\beta_1 \cos \alpha,$$
$$i_1'h_1' = i_1h_1 \cos \alpha.$$

Donc $$i_1'\beta_1' \times i_1h_1' = i_1\beta i \times i_1h_1 \cos^2\alpha.$$

Par suite, de même que dans la projection horizontale, le produit $i'_1\beta'_1 \times i'_1h'_1$ est constant.

Je déterminerai donc sur la ligne de terre, par la même construction que précédemment, les points D' et L' tels que l'angle D's'L' soit droit; je rappellerai ces points en D et L sur x_1y_1, et je construirai le système de diamètres conjugués parallèles à Ds et Ls. Les projections verticales de ces diamètres seront les axes de la projection verticale.

On peut facilement constater que si la courbe de section est une hyperbole, les lignes sB et sH sont les bissectrices des angles des génératrices f_1s et sg_1 parallèles au plan sécant, et que, par suite, les diamètres correspondants sont les bissectrices des angles des asymptotes. Il en est de même, pour la projection verticale des diamètres parallèles à s'D' et s'L'. On retrouve ainsi un résultat connu.

Dans le cas où la courbe de section est une parabole, le point h_1 se confond avec i_1; il en est de même du point k. La construction se ramène alors à la suivante : menons si_1; par le point s élevons, à la droite précédente, la perpendiculaire, qui rencontre x_1y_1 en B. Traçons BR tangente à la courbe de base; puis cherchons la tangente à la projection horizontale, droite parallèle à BR; cette ligne est la tangente au sommet de la parabole projection horizontale. On aura de même la tangente au sommet de la projection verticale.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE
DU THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LE MAXIMUM OU LE MINIMUM D'UNE FONCTION

Par M. **Dellac**, professeur au Lycée de Marseille.

On sait que le théorème en question correspond à l'énoncé suivant :

Si une fonction d'une ou plusieurs variables indépendantes reste réelle, finie et continue lorsqu'on fait varier les variables d'une manière continue successivement ou simultanément entre certaines limites finies, cette fonction passe dans l'intervalle par une valeur supérieure ou au moins égale à toute autre, et par une valeur inférieure ou au plus égale à toute autre valeur prise par la fonction.

Nous appellerons ces deux valeurs *valeurs principales* de la fonction, l'une *supérieure*, l'autre *inférieure*.

(Ce théorème n'est pas évident. Il peut arriver en effet qu'une fonction qui reste finie ne présente pas une valeur plus grande que toutes les autres, et qu'il y ait seulement une limite à la suite des valeurs de la fonction. Ainsi les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ prises par défaut tendent vers une limite; mais il n'y a pas une de ces valeurs que l'on puisse dire plus grande que toute autre. De même la fraction 0.333... tend vers une limite lorsqu'on prend de plus en plus de chiffres décimaux, mais il n'y a pas une valeur plus grande que toute autre. Ces exemples ne rentrent pas dans les conditions de l'énoncé précédent parce que la variable indépendante est ici le degré de l'approximation ou le nombre de chiffres décimaux que l'on prend, et cette variable peut croître sans limite. Le théorème précédent assujettit la fonction et les variables à rester finies.)

1er cas. — Il n'y a qu'une seule variable indépendante (*).

Comme la fonction reste réelle et continue lorsque la varia-

(*) Voir une démonstration, purement analytique, dans l'ouvrage de M. Tannery : *Premiers principes de la théorie d'une fonction d'une variable.*

ble x varie entre les limites données α, β, elle peut être représentée par une courbe. La forme de cette courbe montre bien qu'il y a, entre ces limites, une ordonnée $C\gamma$ supérieure à toutes les autres, c'est la valeur principale supérieure; et aussi une ordonnée $A\alpha$ inférieure à toutes les autres, c'est la valeur principale inférieure.

Si la fonction atteint la valeur principale supérieure $C\gamma$ pour une valeur de x distincte des limites α, β, c'est un maximum algébrique, car de chaque côté l'ordonnée va en décroissant, à moins qu'elle reste constante. Dans ce dernier cas, la courbe se réduirait à une droite horizontale et la fonction une constante; il n'y aurait ni maximum ni valeur principale. Au contraire, au point A la valeur principale inférieure correspond à l'une des limites. Ce ne sera pas, en général, un véritable minimum algébrique; en effet, celui-ci exige que l'état croissant soit précédé d'un état décroissant.

2me cas. — Il y a plusieurs variables indépendantes.

Je m'occupe seulement de la valeur principale supérieure.

Pour montrer que cette valeur principale supérieure existe toujours, je vais faire voir que, si le théorème est vrai pour les cas de n variables au plus, il l'est aussi pour le cas de $n+1$ variables. Comme il a été démontré pour le cas d'une variable, il sera vrai pour le cas de deux variables, puis de trois, etc.

Soit
$$F(x, y, z, \dots t)$$
la fonction considérée, ayant $n+1$ variables indépendantes $x, y, z, \dots t$. Soit $a, b, c, \dots l$ un système de valeurs de ces variables comprises entre les limites qui leur sont assignées. La valeur correspondante de la fonction est
$$F(a, b, c, \dots l).$$

Dans cette expression, remplaçons la lettre a par la variable x; nous avons une fonction d'une seule variable
$$F(x, b, c, \dots l).$$

D'après le premier cas, cette fonction admet une valeur principale supérieure
$$F(a' b, c, \dots l)$$
pour une valeur $x = a'$ ne sortant pas des limites de x, et

cela quelles que soient les valeurs $b, c, \dots l$ comprises entre les limites des variables.

On a donc

$$F(a', b, c, \dots l) \geqslant F(a, b, c, \dots l).$$

La valeur a' dépend des valeurs attribuées aux lettres $b, c, \dots l$, de sorte que c'est une fonction de ces lettres de la forme

$$a' = f(b, c, \dots l);$$

et, si l'on remplaçait a' par cette valeur, dans F, cette dernière fonction ne contiendrait plus que les n lettres $b, c, \dots l$. Mais sans faire cette substitution, il sera toujours possible de calculer la valeur de F pour un système de valeurs de $b, c, \dots l$; en effet, on portera d'abord ces valeurs dans f, ce qui donnera la valeur correspondante de a', et ensuite on substituera dans F.

Cela posé, remplaçons dans F les lettres $b, c, \dots l$ par les variables indépendantes $y, z, \dots t$. La lettre a' est remplacée par une fonction de ces variables, que je désigne par X, en posant

$$X = f(y, z, \dots t);$$

et alors F devient

$$F(X, y, z, \dots t)$$

renfermant seulement les n variables indépendantes $y, z, \dots t$

Toute valeur de $F(X, y, z, \dots t)$ est une valeur de $F(x, y, z, \dots t)$; car, si je donne à $y, z, \dots t$ les valeurs respectives $b_1, c_1 \dots l_1$ comprises entre les limites données, X prend une valeur a_1 comprise entre les limites de x; et comme x est une variable indépendante, je puis prendre $x = a_1$; donc les deux fonctions prennent la même valeur. La réciproque n'est pas vraie.

Comme par hypothèse la fonction $F(x, y, z \dots t)$ reste réelle et finie lorsque les variables varient entre les limites données, la fonction $F(X, y, z \dots t)$, prenant seulement des valeurs appartenant à la fonction précédente, doit aussi rester réelle et finie. De plus, elle reste continue, comme $F(x, y, z \dots t)$, parce que la lettre X, qui tient la place de x, est une fonction continue, puisqu'elle reste, réelle et finie dans les limites données.

Ainsi $F(X, y, z \ldots t)$ est une fonction de n variables indépendantes seulement, qui reste réelle, finie et continue lorsque les variables varient entre les limites données; donc elle admet, par hypothèse, une valeur principale supérieure, pour un système de valeurs des variables indépendantes comprises entre les limites de ces variables.

Soit $y = b', \quad z = c', \quad t = l'$

ce système de valeurs. Alors X prend une valeur a'' comprise entre les limites de x. On a donc

$$F(a'', b', c' \ldots l') \geqslant F(a', b, c \ldots l)$$

et *a fortiori*

$$F(a'', b', c' \ldots l') \geqslant F(a, b, c \ldots l).$$

Cette valeur $F(a'', b', c' \ldots l')$, étant supérieure ou au moins égale à une valeur quelconque de la fonction, est la valeur principale de cette fonction.

Le théorème est donc démontré.

Remarque. — En isolant d'abord y au lieu de x, on trouverait une valeur $F(a'_1, b''_1, c'_1 \ldots l'_1)$ qui doit être égale à la précédente, car chacune des deux ne peut le céder à aucune autre. *(A suivre.)*

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

DE LA PREMIÈRE QUESTION (EXAMEN DE SAINT-CYR 1892)

Par M. **E. Lauvernay.**

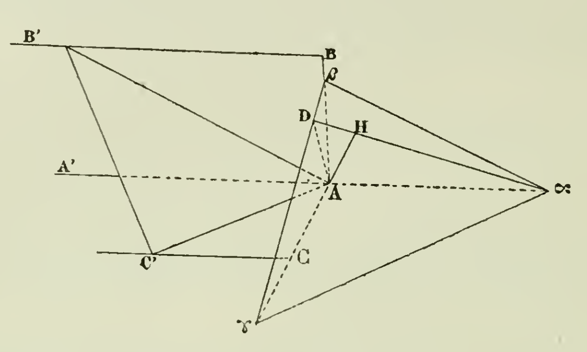
Étant donné un prisme AA'BB'CC' *dont la section droite est un triangle rectangle* ABC (l'hypoténuse BC n'est pas tracée) *par le sommet* A *de l'angle droit mener un plan sécant* AB'C' *tel que l'angle* B'AC' *soit égal à un angle donné* ω *et que l'aire du triangle* AB'C' *soit équivalente à* K^2.

(On supposera que les deux points B', C' sont situés du même côté par rapport à la base ABC.)

Sur l'arête AA', prenons un point arbitraire α, et menons par α le plan parallèle au plan AB'C' qu'on suppose répondre à la question; ce plan rencontre la base ABC suivant la droite

$\beta\gamma$; on détermine ainsi un trièdre trirectangle $A\alpha\beta\gamma$, que nous nous proposons de construire.

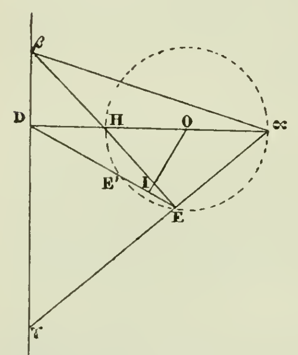
Soit H la projection du sommet A sur la face $\alpha\beta\gamma$. On sait que le point H est l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$. D'autre part,



si l'on mène αHD et AD, l'angle ADα, que nous désignerons par φ, représente l'angle des deux plans ABC, AB'C', ou ABC, $\alpha\beta\gamma$. Or, d'après une propriété connue, on a

$$\frac{AB \cdot AC}{2} = K^2 \cos\varphi.$$

Ainsi, φ est connu, par suite le triangle rectangle αAD est déterminé; donc on connaît αD et αH, et l'on est conduit à construire un triangle $\alpha\beta\gamma$ connaissant l'angle ω dont le sommet est en α la hauteur αD, issue de ce sommet, et l'orthocentre H. Pour cela, il suffit de mener *(fig. 2)* par le point D, pied de la hauteur αD, donnée en grandeur et en position, la droite DE, telle que l'angle EDα = 90° — ω; celle-ci rencontre la circonférence décrite sur αH comme diamètre en deux points E, E'; en traçant αE et prolongeant cette droite jusqu'à sa rencontre en γ avec la perpendiculaire menée par D sur Dα, on obtient le sommet γ; la droite EH détermine par son intersection, avec γD, le troisième sommet β.



Le point E′ donnerait, par une construction analogue, un triangle symétrique de $\alpha\beta\gamma$ par rapport à αD.

Pour placer ce triangle dans la *fig. 1*, observons que, dans le triangle rectangle ADγ, on connaît AD et Dγ; donc Aγ est connu, de même Aβ.

En portant au contraire la longueur Aγ sur la direction AB et Aβ sur la direction AC, on obtiendrait la direction d'un second plan répondant aussi à la question.

Discussion. — Pour que les constructions précédentes soient possibles, il est nécessaire et suffisant que la droite DE *(fig. 2)* rencontre la circonférence O, c'est-à-dire que la distance du centre O à DE, savoir OI, soit inférieure au rayon Oα,

ou
$$\mathrm{OD}\cos\omega < \mathrm{O}\alpha.$$

Soit
$$\mathrm{A}\alpha = 2, \quad \text{on a} \quad \mathrm{O}\alpha = \sin\varphi,$$

et
$$\mathrm{OD} = \alpha\mathrm{D} - \mathrm{O}\alpha = \frac{2}{\sin\varphi} - \sin\varphi,$$

d'où l'inégalité
$$\frac{2 - \sin^2\varphi}{\sin\varphi}\cos\omega < \sin\varphi$$

$$2\cos\omega < \sin^2\varphi\,(1 + \cos\omega)$$

$$1 - 2\sin^2\frac{\omega}{2} < (1 - \cos^2\varphi)\cos^2\frac{\omega}{2}$$

$$-\sin^2\frac{\omega}{2} < -\cos^2\varphi\cos^2\frac{\omega}{2}$$

$$\cos^2\varphi < \mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}$$

ou
$$\cos\varphi < \mathrm{tg}\frac{\omega}{2}$$

or
$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{AB.AC}}{2\,\mathrm{K}^2},$$

donc la condition unique imposée au problème est
$$\mathrm{K}^2 > \frac{\mathrm{AB.AC}}{2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\omega}{2}.$$

Remarque. — La solution précédente résout aussi le problème suivant, de Géométrie descriptive:

Par un point donné, mener un plan faisant un angle donné φ *avec la ligne de terre et tel que l'angle de ces deux traces soit égal à un angle donné* ω.

QUESTION 328

Trois ballons se meuvent en ligne droite avec des vitesses uniformes.

On donne leurs positions à deux instants différents.

On demande de construire une ligne droite qui puisse être parcourue par un ballon avec une vitesse uniforme, de telle sorte que les trois premiers ballons paraissent immobiles à l'aéronaute du quatrième. (Tarry.)

Soient A, B, C et A′, B′, C′ les positions données des trois ballon, à deux instants différents.

Il s'agit de trouver les positions P et P′ du quatrième ballon à ces mêmes instants.

Pour que les trois premiers ballons paraissent immobiles à l'aéronaute du quatrième, il faut et il suffit que les droites PA, PB, PC soient respectivement parallèles aux droites P′A′, P′B′, P′C′ et par suite que les plans PAB, PBC, PCA soient respectivement parallèles aux plans P′A′B′, P′B′C′, P′C′A′.

D'où l'on conclut que le point P est l'intersection des trois plans passant par AB, BC, CA et respectivement parallèles aux droites A′B′, B′C′, C′A′ et le point P′ l'intersection des plans menées par A′B′, B′C′, C′A′ parallèlement aux droites AB, BC, CA.

QUESTION 329

Quatre trains se meuvent sur des voies rectilignes avec des vitesses uniformes.

On donne leurs positions à deux instants différents.

On demande de construire une voie rectiligne qui puisse être parcourue par un train avec une vitesse uniforme, de telle sorte qu'à tout instant du mouvement les quatre premiers trains paraissent immobiles aux voyageurs du cinquième. (Tarry.)

Soient A, B, C, D et A′, B′, C′, D′ les positions données des quatre trains à deux instants différents.

On voit aisément que le problème consiste a trouver deux

points P et P′ tels que les droites PA, PB, PC, PD soient respectivement parallèles aux droites P′A′, P′B′, P′C′, P′D′.

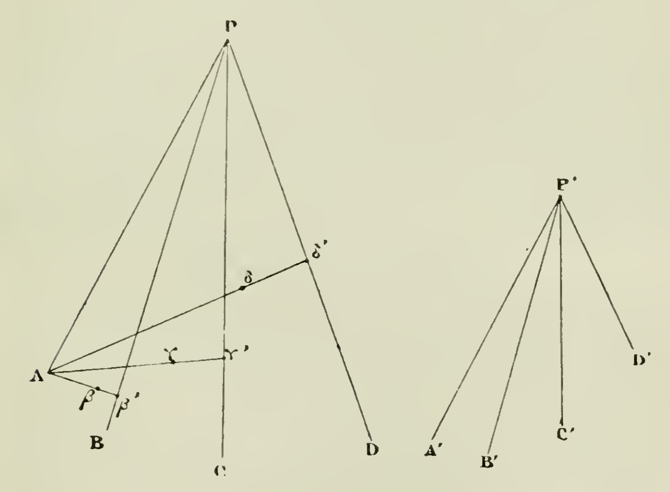
Transportons le quadrangle A′B′C′D′ parallèlement à lui-même de manière à faire coïncider le point A′ avec le point A, et désignons par β, γ, δ les positions nouvelles occupées par les points B′, C′, D′.

Sur PA, considéré comme homologue à P′A′, construisons la figure PA$\beta'\gamma'\delta'$ directement semblable à la figure PA′B′C′D′.

On voit aisément que les points β', γ', δ' sont situés respectivement sur les droites PB, PC, PD et aussi sur les droites Aβ, Aγ, Aδ.

De plus, les points β', γ', δ' divisent dans le même rapport les segments Aβ, Aγ, Aδ.

Des points se mouvant sur les droites Aβ, Aγ de manière à diviser dans le même rapport les segments Aβ, Aγ, à tout



instant du mouvement, décrivent évidemment des divisions homographiques. Par suite, les droites qui joignent respectivement ces points mobiles aux points fixes B et C sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques.

Or le lieu géométrique des points d'intersection de ces rayons homologues est une conique passant par les points B, C et A.

Donc le point P, intersection des rayons Bβ' et Cγ', est situé sur cette conique parfaitement déterminée.

On démontrerait de même, en considérant les points β' et δ', qui divisent dans le même rapport les segments Aβ et Aδ, que le point P se trouve aussi sur une autre conique passant par les points B, D et A.

Ces deux coniques se coupent aux points A et B, et le point cherché P est l'un ou l'autre des deux autres points d'intersection.

La position du point P étant connue, celle du point P′ s'en déduit immédiatement.

Le problème est du second degré et peut comporter par conséquent des solutions imaginaires.

Observation très importante. — La géométrie générale fournit toujours une interprétation réelle des solutions imaginaires rencontrées en géométrie ordinaire.

Dans le problème que nous venons de résoudre, elle nous fait connaître que le train imaginaire se compose de deux trains réels qui parcourent des lignes droites avec des vitesses uniformes. Les propriétés de ce couple de trains font l'objet d'une question qui sera proposée dans le prochain numéro du *Journal de Mathématiques spéciales*.

QUESTION PROPOSÉE

450. — Résoudre le système des trois équations :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y - z} = \frac{1}{b + c},$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z - x} = \frac{1}{b},$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x - y} = \frac{1}{c}.$$

(*Lauvernay.*)

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 17718-8-92.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, voir page 193.)

APPLICATION A DIVERS POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE

XXXI. — **Du transformé g du centre de gravité** G.

Le point g *s'obtient en prolongeant la symédiane* Aδ *au-delà du point* d, *où elle rencontre la circonférence* ABC, *d'une quantité* $dg = \frac{1}{2}Ad$. Car dG est parallèle à gD.

2° *Si sur* AB, AC *on porte* $Ad' = 2AB$, $Ad'' = 2AC$, *les circonférences* ACd′, ABd″ *passent par* g; *les triangles* gCd′, gd″B *sont directement semblables, ainsi que* gCd″, gd′B; *si* G_1 *est le symétrique de* G *relativement au milieu* D *de* BC, *les circonférences* BG_1d', CG_1d'' *passent aussi par* g; *et si* g_1 *est le milieu de* Ag, D′ *le milieu de* AC, D″ *le milieu de* AB, *les circonférences* $CD'g_1$ $BD''g_1$ *passent par* G.

Les circonférences ACd', ABd'' sont les transformées des médianes BD′, CD″ qui se coupent en G, donc elles passent en g. Dans les quadrilatères inscriptibles ACgd', ABgd'', on a $(Cd', Cg) = (AB, Ag) = (d''B, d''g)$, et $(d'g, d'C) = (Ag, AC) = (Bg, Bd'')$. Les triangles gCd', gd''B ont donc deux angles respectivement égaux et sont directement semblables. On prouve de même la similitude directe de gCd'', gd'B. Le point G_1, est la rencontre de Cd', Bd'', homologues dans gCd', gd''B; donc l'angle (G_1B, G_1d') est égal à l'angle (gB, gd') formé par deux autres côtés homologues des mêmes triangles, et le quadrilatère $G_1Bd'g$ est inscriptible. Pour la même raison, le quadrilatère $G_1Cd''g$ est inscriptible. Enfin, g_1 est le transformé de G_1 et les circonférences $CD'g_1$, $BD''g_1$ sont les transformées des circonférences BG_1d', CG_1d''.

Généralisation. — Toutes les propriétés de 2° peuvent être étendues à un couple quelconque de points symétriquement inverses M, *m*. On peut formuler ainsi cette généralisation: *Si* M, m *sont deux points symétriquement inverses*, M_1 *le symétrique de* M *relativement à* D; e, *la rencontre de* CM_1 *et* AB_1; f, *celle de* BM_1 *et* AC; E, F *les rencontres de* AC, AB *avec* BM, CM, *et* m_1 *le point harmoniquement opposé à* m, *relativement à* Ad; *les triangles* mCe, mfB *sont directement semblables*, *ainsi que les triangles* mfC, mBe,; *les circonférences* CM_1f, BM_1e *passent par* m; *les circonférences* Bm_1F, Cm_1E *passent par* M. (à rapprocher du § VIII.)

3° *Coordonnées tripolaires de* g. — Désignons par m, m', m'' les longueurs des trois médianes. D'abord $Ag = \frac{3bc}{2m}$; et la similitude de AgC et ABG, de AgB et ACG, donne

$$gC = \frac{bm'}{m}, gB = \frac{Cm''}{m}.$$

On obtient pareillement $gd' = \frac{cm'}{m}$, $gd'' = \frac{bm''}{m}$.

Remarquons aussi qu'en transformant, par inversion, les trois produits $AC.gd'$, $Ad'.gC$, $Ag.Cd'$, relatifs au quadrilatère inscriptible $ACgd'$, on voit qu'ils sont proportionnels à GD′, BG, BD′, ou à 1, 2, 3. Et de même pour le quadrilatère $ABgd''$.

4° *Si* A′ *est le symétrique de* A, *relativement à* BC; *et* L, *le transformé de l'orthocentre* H; *le point* g *est sur la circonférence* AA′L. Car G est sur OH.

Ici encore, dans le quadrilatère $AA'gL$, les trois produits $AL.gA'$, $AA'.gL$, $Ag.A'L$ sont proportionnels à GO, HG, HO c'est-à-dire à 1, 2, 3.

5° *Si* f, f′, f″ *sont les points harmoniquement opposés à* A, *relativement aux trois côtés du triangle* dd′d″, *les circonférences* Afd, Af′d′, Af″d″ *se coupent en* g, *et l'on a*

$$\frac{gd}{gf} : \frac{Ad}{Af} = \frac{gd'}{gf'} : \frac{Ad'}{Af'} = \frac{gd''}{gf''} : \frac{Ad''}{Af''} = -2;$$

le signe — indiquant que g *est du côté opposé à* A, *relativement à chacune des cordes* df, d′f′, d″f″.

Les trois points f, f', f'' sont les transformés des milieux

F, F', F'' de D'D'', D''D, DD'; les trois circonférences sont donc les transformées des trois médianes DF, D'F', D''F'' du triangle DD'D'' et comme celles-ci se coupent en G, les trois circonférences se coupent en g. D'ailleurs, l'égalité $\frac{GD}{GF} = -2$ se transforme en $\frac{gd}{gf} : \frac{Ad}{Af} = -2$; de même pour les autres égalités.

Plus généralement : *si* l, l', l'' *sont les points harmoniquement opposés à* A, *relativement aux côtés d'un triangle quelconque* p p' p'', *les circonférences* Alp, Al'p', Al''p'' *se coupent en un même point* K *et l'on a les mêmes relations que plus haut.* Car ces circonférences sont les transformées des médianes PL, P'L', P''L'' du triangle PP'P''.

XXVII. — **Du point de Lemoine** G' **et de son transformé** g'.

1° *Le point* g' *est la rencontre de la médiane* AD *et de la parallèle menée, par* g, *à* G'G. *On peut l'obtenir aussi comme isocyclique de* G, *de même que* g *est l'isocyclique de* G'. *De plus,* g *et* g' *sont isogonaux.*

2° *Si l'on coupe* AC *par une droite* BB', *antiparallèle à* AB *relativement à l'angle* C, *et que* B'_1 *soit le symétrique de* B' *relativement à* C, *la circonférence* ABB'_1 *passe par* g'.

En effet, la parallèle menée, par C, à BB', coupe AB en un point b', transformé de B', et le transformé b'_1, de B'_1, est le conjugué harmonique de b', relativement à AB. La droite Cb' faisant l'angle BCb' égal à CBB', et par suite égal à A, est tangente à la circonférence ABC. Donc, d'après une propriété connue sur la symédiane, b'_1 conjugué harmonique de b', relativement à AB, se confond avec le pied de la symédiane issue de C dans ABC, et la circonférence ABB'_1 est la transformée de cette symédiane. Donc elle passe par g'.

Même propriété, en permutant B et C.

La distance B'C ou CB'_1 est égale à $\frac{a^2}{b}$.

3° *Le triangle* g'BC *a pour centre de gravité le point* Δ *où la médiane* AD *rencontre la circonférence* ABC.

Car T étant la rencontre des tangentes en B et C à la circonférence ABC, on sait que G' et T divisent harmoniquement

la symédiane $A\delta$. Donc Δ, transformé de δ, divise en deux parties égales la distance $\varphi g'$, où φ est la projection de l'orthocentre sur la médiane et par conséquent le transformé de T (§ VII, 5°). Et comme, d'après ce même §, $\varphi D = D\Delta$, il en résulte $\Delta g' = 2D\Delta$. Donc Δ est le centre de gravité du triangle $g'BC$.

En se rappelant que $g'BC$ est symétriquement semblable au podaire de G', relativement à ABC, et que G' est le centre de gravité de ce podaire, on voit que g' et G' sont homologues dans ces deux triangles.

Une autre explication très simple consiste à appliquer aux deux couples isogonaux φ, ϖ (§ VII, 4°), et g, g' la relation caractéristique $EM.E'M' =$ const. qui donne ici $\Delta g'.dg = \Delta\varphi.d\varpi$. Or $dg = \frac{1}{2}Ad = \varpi d$. Donc $\Delta g' = \varphi\Delta = 2D\Delta$.

Cette égalité $\Delta g' = 2D\Delta$ donne une construction directe du point g'.

On remarquera qu'elle équivaut à $Ag' = 3G\Delta$.

4° *Les circonférences* $AB\delta$, ACG' *se coupent en un point qui est harmoniquement opposé à* A, *relativement à* CG'; *et les circonférences* $AC\delta$, ABG' *en un point harmoniquement opposé à* A, *relativement à* BG'. *Le rapport anharmonique* $(\delta AG'd)$ *est égal à* -2.

Cette proposition résulte de la précédente par inversion. Les deux premières circonférences sont en effet les transformées de $C\Delta$, Bg' qui se coupent au milieu de Bg'. Et, de même, pour les deux autres. Quant à l'égalité $(\delta AG'd) = -2$, elle provient de la transformation de $\frac{\Delta g'}{\Delta D} = -2$.

5° *La droite qui joint* d *au point où une parallèle, menée par* g, *à la médiane* AD *rencontre* BC, *passe par* g'. *La parallèle à la symédiane* Ad, *menée par le point où* $g\Delta$ *rencontre* BC *passe par* g'.

Ce sont là des cas particuliers du théorème 1 du § XIX. Dans le premier, on considère le couple isogonal g, g' et le couple isogonal formé par d et un point à l'infini sur AD. Dans le second, le même couple g, g' et le couple formé par Δ et un point à l'infini sur Ad.

On pourrait, au second de ces couples, substituer tout autre couple isogonal, situé sur la médiane et la symédiane, par

exemple G, G′, ou ϖ, φ, ou T, A_1; A_1 étant le symétrique de A, relativement à D.

Et l'on aurait des propriétés analogues concernant G′, en substituant le couple G, G′ au couple g, g'. En outre, la transformation de ces propriétés par inversion en donnerait d'autres qui se rattacheraient au 2° du même théorème. Par exemple, *si* K *est la rencontre de la circonférence* ABC *et de la circonférence menée par* A *et* G *tangentiellement à* Ad, *la circonférence* ADK *passe par* G′.

6° Si l'on construit le triangle pqr *du* § XX, *relatif au point* g′; *et que* 1, 1′, 1″ *soient les points harmoniquement opposés à* A *relativement aux trois côtés de* pqr, *les trois circonférences* Apl, Aql′, Arl″ *passent par* g′.

Ces circonférences sont les transformées des trois médianes du podaire PQR du point G′, lesquelles se coupent en G′.

7° Les distances g′p, g′q, g′r *sont proportionnelles à* a.Ap, b.Bq, c.Cr.

C'est la transformation de la propriété caractéristique de G′:

$$\frac{G'P}{a} = \frac{G'Q}{b} = \frac{G'R}{c}.$$

8° On construit les symétriques B_1, C_1 *du point* A *relativement aux perpendiculaires à* BC *en* B *et* C, *démontrer que les circonférences* ACB_1, ABC_1 *se coupent en* g′.

La perpendiculaire en B, à BC, a pour transformée une circonférence Δ passant par A et C et orthogonal à la circonférence ABC; et B_1 a pour transformé le centre de Δ, c'est-à-dire la rencontre b_1 des tangentes en A et C à la circonférence ABC. De même, C_1 a pour transformé le point de rencontre c_1 des tangentes en A et B à la même circonférence. Or Bb_1 et Cc_1 passent par G′. Donc, etc.

9° On prolonge le diamètre AS *de la circonférence* ABC *de* SS_1 = AS, *démontrer que la circonférence passe par* g′.

Résulte de ce que G′ est sur la droite qui joint D au milieu de la hauteur AH_a.

10° Considérons, d'une part, les trois points ε, ε', ε'' *où la perpendiculaire à* AA′ (A′ *symétrique de* A *relativement à* BC), *en* A′, *rencontre la tangente en* A *à la circonférence* ABC, *le côté* AB *et le côté* AC, *et, d'autre part, les trois points* μ, μ', μ'' *où la perpen-*

diculaire à Ag′, *en* g′, *rencontre le diamètre* AS, *la perpendiculaire, en* A, *à* AB, *et la perpendiculaire, en* A, *à* AC. *Soient* f, f′, f″ *les projections de* A *sur* $\varepsilon\mu$, $\varepsilon'\mu'$, $\varepsilon''\mu''$. *Démontrer que les circonférences* ACf′, ABf″ *se coupent sur* Af, *et que le point isogonal de ce point de rencontre est sur une circonférence* AA′g′.

On voit que f, f', f'' sont les rencontres respectives des trois circonférences ayant $A\varepsilon$, $A\varepsilon'$, $A\varepsilon''$ pour diamètres avec les trois circonférences ayant pour diamètres $A\mu$, $A\mu'$, $A\mu''$. Or, les trois premières sont les transformées des perpendiculaires abaissées de O sur les trois côtés BC, CA, AB; et les trois autres sont les transformées des parallèles menées par G′ à ces mêmes côtés. Et l'on sait que si F, F′, F″ sont les rencontres respectives des trois premières droites avec les trois dernières, les droites AF, BF′, CF″ sont concourantes.

C'est aussi une propriété connue que l'isogonal de ce point de concours est sur la droite OG′.

11° Coordonnées tripolaires des points g′ *et* G′.

Si l'on regarde comme connues les formules

$$\frac{G'A}{\left(\dfrac{m}{a}\right)} = \frac{G'B}{\left(\dfrac{m'}{b}\right)} = \frac{G'C}{\left(\dfrac{m''}{c}\right)} = \frac{2abc}{a^2+b^2+c^2}$$

qui donnent les coordonnées tripolaires de G′, on en déduit d'abord $g'A = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2m}$; puis, par la similitude de $Ag'B$, ACG' et de $Ag'C$, ABG',

$$g'B = \frac{am''}{m}, \quad g'C = \frac{am'}{m}.$$

On peut aussi obtenir directement les coordonnées tripolaires de g', et en déduire celles de G′, en se fondant sur les considérations géométriques suivantes. Si l'on considère le triangle $g'BC$ et le point Δ qui en est le centre de gravité, on remarque d'abord que les coordonnées angulaires de Δ, relativement à ABC, étant A, B, C sont aussi A, B, C relativement au triangle $g'BC$ où g' est sur la droite $A\Delta$; et comme g' est l'isocyclique de G, les trois triangles ΔBC, $\Delta Cg'$, $\Delta g'B$ sont symétriquement semblables aux trois triangles CAA_1, ABB_1, ACC_1, où A_1, B_1, C_1 sont les symétriques de A, B, C relativement aux milieux des côtés opposés. La première de ces similitudes donne

$$\frac{\Delta B}{b} = \frac{\Delta C}{c} = \frac{a}{2m} = \frac{\Delta D}{\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Et les deux autres donnent

$$\frac{g'C}{2m'} = \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta B}{b} = \frac{g'B}{2m''} = \frac{a}{2m}.$$

D'où
$$g'B = \frac{am''}{m}, \quad g'C = \frac{am'}{m}.$$

On a, d'ailleurs,

$$G'A = m + 3\Delta D = \frac{4m^2 + 3a^2}{4m} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2m}.$$

Il convient de rapprocher ces résultats de ceux qui concernent le point g :

$$gA = \frac{3bc}{2m}, \qquad gB = \frac{cm''}{m}, \qquad gC = \frac{bm'}{m}.$$

On en déduit
$$\frac{gB}{g'B} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{gC}{g'C} = \frac{b}{a}.$$

12° Coordonnées normales de g'. — Les coordonnées x', y' z, sont données par les formules générales du § XXIII

$$x' = \frac{bc}{2R} \cdot \frac{G'_0}{\overline{AG'}^2}, \qquad \frac{y'}{Z'} = \frac{y'}{Y'} = \frac{bc}{\overline{AG'}^2}.$$

Un calcul facile donne

$$G'_0 = -\frac{3a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)},$$

ou mieux
$$\frac{G'_0}{\overline{AG'}^2} = -\frac{G'd}{AG'} = -\frac{3a^2}{4m^2}.$$

De là, on déduit

$$x' = -\frac{3aS}{2m^2}, \qquad by' = cz' = \frac{S(a^2+b^2+c^2)}{2m^2}.$$

On pourrait aussi obtenir x' comme triple de la coordonnée correspondante de Δ et en déduire y', z'.

Remarque. — Les formules générales du § XXIII donneraient, de même, pour les coordonnées normales du point g.

$$x = -\frac{bc(a^2+b^2+c^2)}{8Rm^2} \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{3S}{2m^2}.$$

Comme vérification de ces calculs, on a

$$ax' + by' + cz' = 2S,$$
$$ax + by + cz = 2S,$$

et
$$xx' = yy' = zz'.$$

(A suivre.)

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE
DU THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LE MAXIMUM OU LE MINIMUM D'UNE FONCTION

Par M. **Dellac**, professeur au Lycée de Marseille.

(*Suite et fin*, voir p. 208.)

Corollaire I. — Si pour la valeur principale supérieure aucune variable n'est égale à sa limite, cette valeur principale est un maximum. En effet, à partir des valeurs des variables correspondant à cette valeur principale, je fais varier les variables d'une manière quelconque, et cela est possible, puisque aucune variable n'a atteint sa limite. Alors la fonction prend des valeurs plus petites que la valeur principale supérieure. Celle-ci est donc un maximum. Même observation pour la valeur principale inférieure.

Toutefois, la fonction pourrait rester constante lorsque x, y, z varient d'une manière quelconque. Dans ce cas la fonction est une constante; elle n'a ni maximum, ni minimum.

Si la fonction reste constamment égale à la valeur principale lorsque les variables varient d'après une certaine loi, cette valeur principale est encore appelée valeur maximum (ou minimum), parce que, si les variables varient d'une autre façon, la fonction prend des valeurs plus petites (ou plus grandes).

Corollaire II. — *Si une fonction reste réelle, finie et continue lorsque les variables indépendantes varient entre des limites données; et si, de plus, elle reprend une même valeur toutes les fois que une ou plusieurs variables atteignent leurs limites, la valeur principale est un maximum ou un minimum* (à moins que la fonction reste absolument constante).

Car, si la fonction varie, il y a, d'après le théorème général, une valeur principale supérieure et une inférieure, et elles

ne peuvent pas toutes les deux se confondre avec la valeur aux limites, puisque la fonction a varié. Supposons que la valeur principale supérieure soit distincte de la valeur aux limites, et par suite lui soit supérieure. Alors, pour cette valeur principale, aucune variable n'est égale à sa limite, et on retombe sur le corollaire précédent : on a donc un véritable maximum. On fera le même raisonnement pour la valeur principale inférieure.

Nous allons indiquer, maintenant quelques applications.

APPLICATIONS

1° Produit de n variables positives dont la somme est constante.

Soit $$P = x.y.z \ldots t$$

avec $$x + y + z + \ldots t = S.$$

Si les variables varient entre zéro et S, au plus, le produit P reste réel, fini et continu. De plus, si l'une des variables est égale à S, toutes les autres doivent être nulles, puisqu'on les suppose toujours positives ou nulles. Donc, si une quelconque des variables part de sa limite inférieure zéro pour aller à sa limite supérieure S, le produit P part de zéro pour revenir à zéro ; comme, dans l'intervalle, il est plus grand que zéro, il y a un maximum, d'après le corollaire II.

Cela posé, on démontre aisément que ce maximum ne peut avoir lieu que si toutes les variables sont égales.

2° Somme de plusieurs variables positives dont le produit reste constant.

Soit $$S = x + y + z + \ldots + t,$$

avec $$x.y.z. \ldots t = P.$$

Les variables n'ont qu'une limite inférieure, laquelle est zéro, et aucune d'elles ne peut atteindre cette limite ; car si l'une d'elles était nulle, le produit serait nul et ne serait pas resté constant. La fonction S ne pouvant décroître indéfiniment a une valeur principale inférieure. Comme alors aucune variable n'est égale à sa limite inférieure zéro, c'est un véri-

table minimum, d'après le corollaire I. — On trouve aisément que ce minimum a lieu lorsque toutes les variables sont égales.

3° Soit $$X = \sin x + \sin y + \ldots + \sin t,$$
avec $$x + y + \ldots + t = S,$$
chacun des arcs restant positif et plus petit que π.

La fonction X ne peut croître indéfiniment; donc elle a une valeur principale supérieure. On trouve qu'elle atteint cette valeur principale lorsque toutes les variables sont égales entre elles, et égales à $\frac{S}{n}$. Aucune des variables n'est alors égale à sa limite. Donc il s'agit d'un véritable maximum.

Il y a aussi une valeur principale inférieure, mais ce n'est pas un véritable minimum algébrique, parce que certaines des variables atteignent leurs limites.

Même raisonnement pour
$$Y = \sin x . \sin y . \ldots . \sin t,$$
avec $$x + y + \ldots + t = S.$$

4° Soit $$X = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} + \ldots + \frac{l^2}{t},$$
avec $$x + y + z + \ldots + t = S,$$
chacune des variables étant positive.

La fonction X reste plus grande que zéro; donc elle a une valeur principale inférieure. On trouve que cela a lieu pour
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots = \frac{t}{l} = \frac{S}{a + b + c + l}.$$
Comme aucune variable n'est alors égale à sa limite, cette valeur principale est un véritable minimum.

5° Soit $$X = a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} + \ldots + l\sqrt{t}$$
avec $$x + y + z + \ldots + t = S;$$
les variables $x, y, z, \ldots t$ et les coefficients $a, b, c, \ldots l$ étant supposés positifs.

Cette fonction ne peut croître indéfiniment, puisque chaque variable ne peut dépasser S. Donc il y a une valeur principale supérieure. Alors on a
$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2} = \ldots = \frac{t}{l^2} = \frac{S}{a^2 + b^2 + c^2 + l^2}.$$

Comme aucune fonction n'est alors égale à sa limite, il s'agit d'un véritable maximum.

Exemple: $\sqrt{3 - 2x} + \sqrt{5x - 2}$,

ou bien, $\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2} - x} + \sqrt{5}\sqrt{x - \frac{2}{5}}$.

La somme des variables soumises aux radicaux est

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{11}{10};$$

elle est donc constante et positive. Par suite le maximum a lieu pour

$$\frac{\frac{3}{2} - x}{2} = \frac{x - \frac{2}{5}}{5} = \frac{\frac{11}{10}}{7} = \frac{11}{70},$$

d'où $$x = \frac{83}{70}.$$

6° Soit $X = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + t^2$,

avec $ax + by + cz + \ldots + lt = S$.

Prenons d'abord deux variables seulement.

On a l'identité

$$(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$$

Puisque $ax + by$ est supposé constant, le minimum aura lieu pour $bx - ay = 0$,

d'où $$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

Cela posé, la fonction X étant toujours positive, a une valeur principale inférieure, plus grande que zéro. En s'appuyant sur le cas de deux variables, on trouve aisément que cette valeur principale inférieure correspond à

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots = \frac{t}{l} = \frac{S}{a + b + c + \ldots + l}.$$

Comme alors aucune variable n'est égale à sa limite, c'est un véritable minimum.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

QUELQUES CHANGEMENTS DE COORDONNÉES

Par M. **A. Poulain**, à Angers.

Les coordonnées de certains points prennent des valeurs intéressantes lorsqu'on remplace le triangle de référence ABC par un autre A′B′C′ dont les sommets sont les semi-réciproques d'un point arbitraire M_0, ou qui sont formés par M_0 et ses deux isobariques. J'examinerai seulement le premier cas, parce qu'il s'applique au premier triangle de Brocard, et que le second cas se ramène au premier.

Les formules de transformation se simplifient et donnent, pour les nouvelles coordonnées barycentriuues d'un point variable $M(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$(1)\qquad \alpha' : \beta' : \gamma' = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma_0 & \beta_0 \\ \beta & \beta_0 & \alpha_0 \\ \gamma & \alpha_0 & \gamma_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha & \beta_0 & \alpha_0 \\ \beta & \alpha_0 & \gamma_0 \\ \gamma & \gamma_0 & \beta_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_0 & \gamma_0 \\ \beta & \gamma_0 & \beta_0 \\ \gamma & \beta_0 & \alpha_0 \end{vmatrix};$$

ou, en posant

$$\lambda = \alpha_0^2 - \beta_0\gamma_0, \qquad \mu = \beta_0^2 - \alpha_0\gamma_0, \qquad \nu = \gamma_0^2 - \alpha_0\beta_0 :$$

$$(2)\quad \alpha' : \beta' : \gamma' = (\alpha\lambda + \beta\nu + \gamma\mu) : (\alpha\nu + \beta\mu + \gamma\lambda) : (\alpha\mu + \beta\lambda + \gamma\nu);$$

et les formules inverses sont

$$(3)\quad \alpha : \beta : \gamma = (\alpha'\alpha_0 + \beta'\gamma_0 + \gamma'\beta_0) : (\alpha'\gamma_0 + \beta'\beta_0 + \gamma'\alpha_0) : (\alpha'\beta_0 + \beta'\alpha_0 + \gamma'\gamma_0).$$

Appelons M′ le point M, considéré comme rapporté à A′B′C′.

1° Le point M_0 a pour nouvelles coordonnées $\dfrac{1}{\beta_0 - \gamma_0}, \ldots$

On le voit en développant les déterminants de (1), après avoir remplacé chaque terme de la dernière ligne par $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0$ et ensuite par l'unité.

Il suffit de calculer la première coordonnée. Car (2) montre que, si l'on permute circulairement α, β, γ et α_0, β_0, γ_0, il en est de même de α', β', γ'.

Il suit de là que *le point de Lemoine de* ABC, *est le point de Steiner du premier triangle de Brocard;* et, dès lors, *le centre* O *devient le point de Tarry.*

2° La formule (3) montre que le point $\left(\frac{1}{\beta_0 - \gamma_0}, \ldots\right)$, de ABC, devient (λ, μ, ν).

3° Le réciproque de M_0 devient $\left(\frac{1}{\lambda}, \ldots\right)$. Ainsi *le réciproque de* M_0 *et le réciproque de son associé à l'infini deviennent réciproques entre eux.*

4° De ce qui précède, on déduit d'autres résultats, en observant que, d'après (2), si on remplace un point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ par son premier ou son second isobarique, M' est remplacé par son second ou son premier isobarique. Il s'ensuit que les brocardiens de M_0 deviennent les brocardiens de $\left(\frac{1}{\lambda}, \ldots\right)$. Si l'on remplace M par son complémentaire, son anticomplémentaire, son associé à l'infini, le point M' subit des transformations analogues.

5° Le point $(\beta_0 + \gamma_0 - \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ devient $(-\alpha_0, \beta_0 + \gamma_0, \beta_0 + \gamma_0)$. On trouve ainsi ce que deviennent les sommets du second triangle de Brocard, rapporté au premier.

6° Le sommet A devient (λ, ν, μ); c'est le semi-réciproque du point (λ, μ, ν) de $A'B'C'$.

Soit $A_1B_1C_1$ un triangle tel qu'en lui rapportant les points A, B, C, ils aient pour coordonnées les semi-réciproques de $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. D'après ce qui précède (6°), le point A_1, rapporté à ABC, est le semi-réciproque de (λ, μ, ν). Par suite, les résultats ci-dessus s'appliquent : pour certains points de $A_1B_1C_1$, on peut connaître leurs coordonnées par rapport à ABC. En particulier, *le triangle* $A_1B_1C_1$, *dont le premier triangle de Brocard est* ABC, *a pour sommets des points qui, rapportés à* ABC, *sont les semi-réciproques de* $(a^4 - b^2c^2, \ldots)$.

Les formules (3) permettent de trouver les anciennes coordonnées des points de ABC, par exemple du nouveau point M_0 qui provient de $(\alpha_0^2 + 2\beta_0\gamma_0, \ldots)$, etc.

Soit P le point (λ, μ, ν) de ABC. Les quadrangles M_0ABC, $PA'B'C'$ sont homothétiques par rapport à G. En effet, le point P est situé sur GM_0. Car on a

$$\alpha_0^2 - \beta_0\gamma_0 = \alpha_0(\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0) - \sum \alpha_0\beta_0, \ldots$$

Or, *si l'on remplace, par leurs semi-réciproques, deux points tels que* M_0 *et* P, *alignés sur* G, *chaque droite passe encore par* G, *et le rapport de segments déterminé par* G *ne change pas.*

Le point P est un transformé quadratique de M_0. Si on lui applique à lui-même cette transformation, il redonne le point M_0. Car $\lambda^2 - \mu\nu = \alpha_0(\Sigma\alpha_0^3 - 3\alpha_0\beta_0\gamma_0)$.

EXERCICES

Par M. **Boutin.**

(*Suite,* voir p. 179).

VII. — *Les côtés du triangle* DEF *sont respectivement parallèles aux côtés du premier triangle équilatéral podaire, les côtés de* $D_1E_1F_1$, *aux côtés du second triangle équilatéral podaire.*

Soit $a'b'c'$ le premier triangle équilatéral podaire. Les coordonnées normales des divers points à considérer sont :

$$(a') \qquad x = 0, \quad \frac{y}{\sin(B+60^\circ) + \cos C \sin(A+60^\circ)} = \frac{z}{\sin(C+60^\circ) + \cos B \sin(A+60^\circ)},$$

$$(b') \qquad y = 0, \quad \frac{x}{\sin(A+60^\circ) + \cos C \sin(B+60^\circ)} = \frac{z}{\sin(C+60^\circ) + \cos A \sin(B+60^\circ)},$$

$$(D) \qquad -2x = \frac{y}{\sin(C+30^\circ)} = \frac{z}{\sin(B+30^\circ)},$$

$$(E) \qquad \frac{x}{\sin(C+30^\circ)} = -2y = \frac{z}{\sin(A+30^\circ)}.$$

Pour vérifier le parallélisme de $a'b'$ et DE, on formera l'équation de DF, et l'on verra que les distances de a', b', à DE, sont égales. On est ainsi conduit à la relation :

$$\left[\sin(B+30^\circ)\sin(C+30^\circ) + \frac{1}{2}\sin(A+30^\circ)\right] \times$$

$$\times [\sin (A + 60^\circ) \cos C + \sin (B + 60^\circ)]$$

$$+ [\frac{1}{4} - \sin^2 (C + 30^\circ)] [\sin (C + 60^\circ) + \cos B \sin (A + 60^\circ] =$$

$$= [\sin (A + 60^\circ) + \cos C \sin (B + 60^\circ]) \times$$

$$\times [\sin (C + 30^\circ) \sin (A + 30^\circ) + \frac{1}{2} \sin (B + 30^\circ)]$$

$$+ [\frac{1}{4} - \sin^2 (C + 30^\circ)] [\sin (C + 60^\circ) + \cos A \sin (B + 60^\circ)].$$

Cette égalité est une identité.

On constaterait, de même, la seconde partie de la proposition.

Il existe deux triangles équilatéraux maximums circonscrits à ABC, l'un circonscrit proprement dit, qu'on peut appeler le premier ; l'autre, tel que A, B, C sont sur les prolongements de ses côtés, et qu'on peut appeler second triangle équilatéral maximum circonscrit.

On a, à leur égard, la proposition suivante :

VIII. — *Les triangles équilatéraux maximums, circonscrits à* ABC, *sont respectivement homothétiques au premier et au second triangle équilatéral podaire.*

En effet, d'après un théorème connu (*J. M. E.* année 1887. question 146), ces triangles ont leurs côtés respectivement parallèles à ceux des triangles DEF, $D_1E_1F_1$.

IX. — K *est le centre de similitude : 1° du triangle* DEF, *et du premier triangle équilatéral podaire; 2° du triangle* $D_1E_1F_1$, *et du second triangle équilatéral podaire.*

Vérifions que KD passe par a', et que KD_1 passe par a''; a', a'' désignant les sommets sur BC des triangles équilapodaires; il suffit de reconnaître que :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -\frac{1}{2} \\ \sin (B + 60^\circ) + \cos C \sin (A + 60^\circ) & b & \sin (C + 30^\circ) \\ \sin (C + 60^\circ) + \cos B \sin (A + 60^\circ) & c & \sin (B + 30^\circ) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & \frac{1}{2} \\ \sin (B - 60^\circ) + \cos C \sin (A - 60^\circ) & b & \sin (C - 30^\circ) \\ \sin (C - 60^\circ) + \cos B \sin (A - 60^\circ) & c & \sin (B - 30^\circ) \end{vmatrix} = 0.$$

X. — *La circonférence* DEF *passe par* W_2; *la circonférence* $D_1E_1F_1$ *passe par* V_2.

Ces cercles DEF, $D_1E_1F_1$, comme on le sait, ont G pour centre commun; ce sont les lieux des centres des triangles équilatéraux circonscrits à ABC. Les rayons correspondants sont :

$$\sqrt{\frac{2S\,(\cot g\theta \pm \sqrt{3})}{3}}.$$

On constate aisément que ces valeurs concordent avec les expressions données pour GV_2, GW_2 (voir *J. M. E.*, année 1889, p. 244).

XI. — V_2 *est le centre d'homothétie de* DEF *et du premier triangle équilatéral maximum circonscrit;* W_2 *est le centre d'homothétie de* $D_1E_1F_1$ *et du second triangle équilatéral maximum circonscrit.*

CV_2 étant une perpendiculaire commune à deux côtés homologues de DEF et du premier triangle équilatéral maximum circonscrit, il suffit de constater que C et V_2 sont à égales distances de DE, d'après un théorème connu.

Pour démontrer l'égalité de ces distances, il suffit de vérifier que

$$\frac{1}{\cos(A-30^\circ)}\left[\sin(C+30^\circ)\sin(A+30^\circ)+\frac{1}{2}\sin(B+30^\circ)\right]$$
$$+\frac{1}{\cos(B-30^\circ)}\left[\sin(B+30^\circ)\sin(C+30^\circ)+\frac{1}{2}\sin(A+30^\circ)\right]$$
$$+\frac{1}{\cos(C+30^\circ)}\left[\frac{1}{4}-\sin^2(C+30^\circ)\right]$$
$$=\frac{1}{\sin C}\left[\sin^2(C+30^\circ)-\frac{1}{4}\right]\sum\frac{\sin A}{\cos(A-30^\circ)}=0.$$

Démonstration analogue pour la seconde partie de la proposition.

XII. — *Les centres des deux triangles équilatéraux maximums, circonscrits à* ABC, *sont, respectivement, sur les circonférences* DEF, $D_1E_1F_1$, *les points diamétralement opposés à* W_2 *et* V_2.

Ceci résulte immédiatement des trois propositions précédentes. Les coordonnées barycentriques $(\alpha', \beta', \gamma')$ de ces points sont déterminées par

$$\frac{\alpha'}{2\beta+2\gamma-\alpha}=\frac{\beta'}{2\alpha+2\gamma-\beta}=\frac{\gamma'}{2\alpha+2\beta-\gamma};$$

α, β, γ désignant, suivant le point considéré, les coordonnées barycentriques du second ou du premier centre isogone.

XIII. — *La distance* V_2W_2 *des centres isogones est vue, des sommets du triangle* ABC, *sous des angles qui sont en progression arithmétique. La raison de cette progression est* 60°.

On trouve aisément

$$\operatorname{tg} V_2AW_2 = \frac{\sqrt{3}\,(\operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg} B)}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C - 2\operatorname{cotg} A},$$

$$\operatorname{tg} V_2BW_2 = \frac{\sqrt{3}\,(\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} C)}{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C - 2\operatorname{cotg} B} = \operatorname{tg}(V_2AW_2 + 60^\circ),$$

$$\operatorname{tg} V_2CW_2 = \frac{\sqrt{3}\,(\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A)}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A - 2\operatorname{cotg} C} = \operatorname{tg}(V_2AW_2 - 60^\circ),$$

(A suivre.)

QUESTION 417

Solution par M. Aug. Boutin.

L'orthocentre n'est jamais sur la circonférence de Brocard, sauf dans le cas limite qui correspond au triangle équilatéral.

(E. Lemoine.)

Le cercle de Brocard étant le lieu des points tels que leur triangle podaire ait le même angle de Brocard que ABC, si H était sur ce cercle, le triangle orthocentrique aurait même angle de Brocard que ABC, et par suite, on aurait

$$-\Sigma \operatorname{cotg} 2A = \Sigma \operatorname{cotg} A.$$

ou $$1 = 3 \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \sum \operatorname{cotg} A.$$

En observant que

$$\left(\sum \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B\right)^2 = 1,$$

on a

$$\sum \operatorname{cotg}^2 A \operatorname{cotg}^2 B - \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \sum \operatorname{cotg} A = 0,$$

ou $$\sum \cot g^2 A (\cot g B - \cot g C)^2 = 0,$$
égalité qui ne peut être vérifiée que si l'on suppose
$$A = B = C.$$

QUESTION 412

Solution par M. L. Bénézech.

Soient a, b, c *les côtés d'un triangle quelconque. Démontrer que l'on a, quel que soit* n,(*)
$$(a^2 + b^2 + c^2)(a^{n-2}b^{n-2} + b^{n-2}c^{n-2} + c^{n-2}a^{n-2}) < 2\,(a^n + b^n + c^n)(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}).$$

Considérons le point M dont les coordonnées barycentriques sont a^n, b^n, c^n.

On a
$$\overline{MA}^2 = \frac{(a^n+b^n+c^n)(b^nc^2+c^nb^2)-a^2b^nc^n-a^nb^2c^n-a^nb^nc^2}{(a^n+b^n+c^n)^2},$$
d'où
$$\frac{\overline{MA}^2}{b^2c^2} = \frac{(\Sigma a^n)(b^{n-2}+c^{n-2})-a^2\Sigma a^{n-2}b^{n-2}}{(\Sigma a^n)^2};$$
avec des formules analogues pour
$$\frac{\overline{MB}^2}{c^2a^2} \text{ et } \frac{\overline{MC}^2}{a^2b^2}.$$

Par suite,
$$(\Sigma a^n)^2 \sum \frac{\overline{MA}^2}{b^2c^2} = 2(\Sigma a^n)(\Sigma a^{n-2}) - (\Sigma a^n)(\Sigma a^{n-2}b^{n-2}).$$

Le premier membre de cette égalité étant essentiellement positif, le second l'est aussi. On a donc bien,
$$2(\Sigma a^n)(\Sigma a^{n-2}) > (\Sigma a^2)(\Sigma a^{n-2}b^{n-2}).$$

(*) L'énoncé est ici, corrigé; le sens de l'inégalité, par erreur typographique, avait été changé.

QUESTION 413

Solution par M. L. Bénézech.

Les portions l_1, l_2, l_3, l_4, *comprises à l'intérieur de la sphère circonscrite, des droites qui joignent les sommets* A_1, A_2, A_3, A_4, *d'un tétraèdre à son centre de gravité, vérifient la relation*

$$\sum \frac{(d_{12}+d_{13}+d_{14})^2}{l_1^2} = 4 \sum d_{12},$$

d_{12}, d_{13}, ... *ayant leur signification ordinaire.*

D'après un théorème connu (Voir : *Note de Géométrie et de Mécanique*), on peut écrire :

$$d_{12} + d_{13} + d_{14} = 4A_1\,G.L.$$

G désignant le centre de gravité du tétraèdre.

On a des formules analogues pour A_2G, A_3G, A_4G.

Ainsi : $$\sum \frac{(d_{12} + d_{13} + d_{14})^2}{l_1^2} = 16\,\Sigma\overline{GA}^2.$$

Or (*J. E.*, 1890, p. 146),

$$\Sigma\overline{GA}^2 = \frac{\Sigma d_{12}}{4}.$$

Donc....

QUESTION 414

Solution et développements par M. L. Bénézech.

A propos de cette question, que nous traitons plus loin (Pr. IV), nous voulons montrer, sur quelques exemples, comment, par un choix convenable de notations, on peut résoudre facilement un certain genre de problèmes d'Analyse indéterminée.

Problème I. — *Trouver deux nombres entiers, positifs, sachant que leur somme est un multiple de leur produit.*

Représentons par x et $x + y$ les deux nombres cherchés. On doit avoir

$$x + x + y = zx(x + y);$$

ce qui peut s'écrire

$$x(zx - 2) + y(zx - 1) = 0.$$

Or, si l'on prend $zx > 2$, le premier membre de cette équation est essentiellement positif, et si l'on prend $zx = 1$, il est essentiellement négatif. Il faut donc que $zx = 2$; ce qui entraîne, soit $x = 1$, $z = 2$; soit $x = 2$, $z = 1$. D'ailleurs, dans cette hypothèse, l'équation se réduit à $y=0$. Les nombres demandés sont donc égaux entre eux, et égaux à 1 ou à 2.

Problème II. — *Trouver trois nombres entiers positifs, dont la somme soit égale au produit.*

Soient x, $x + y$, $x + z$ les trois nombres cherchés, rangés par ordre de grandeur croissante.

On doit avoir

$$x + x + y + x + z = x(x + y)(x + z),$$

ce qui peut s'écrire

$$x(x^2 - 3) + (y + z)(x^2 - 1) + xyz = 0.$$

Or, en prenant $x > 1$, le premier membre de cette équation est essentiellement positif; il faut donc que $x = 1$. Dans cette hypothèse, l'équation se réduit à $yz = 2$, ce qui entraîne $y = 1$, $z = 2$.

Les trois nombres demandés sont donc 1, 2, 3.

Problème III. — *Trouver trois nombres entiers, positifs, sachant que leur produit est égal à la somme de leurs produits deux à deux.*

Soient x, $x + y$, $x + z$ les trois nombres cherchés, rangés par ordre de grandeur croissante.

On a

$$x(x + y)(x + z) = x(x + y) + x(x + z) + (x + y)(x + z)$$

ou bien

$$x^2(x - 3) + x(y + z)(x - 2) + yz)(x - 1) = 0.$$

Or, si l'on prend $x > 2$, le premier membre de cette équation devient positif, à moins toutefois que l'on ait $x = 3$, $y = z = 0$ et, dans ce cas, les trois nombres égaux à 3, répondent à la question; si l'on prend $x = 1$, le premier membre devient négatif. Il faut donc que l'on ait $x = 2$. L'équation se réduit alors à $yz = 4$, relation qui entraîne soit $y = 1$,

$z = 4$, soit $y = 2$, $z = 2$. On obtient ainsi les deux systèmes de solutions 2, 3, 6, et 2, 4, 4.

Problème IV (*). — *Trouver quatre nombres entiers, positifs, tels que leur somme soit égale à la somme obtenue en ajoutant au produit du plus grand par le plus petit, le produit des deux autres.*

Soient $x, x + y, x + z, x + u$ les quatre nombres cherchés, rangés par ordre de grandeur croissante.

On doit avoir

$$x + x + y + x + z + x + u = x(x + u) + (x + y)(x + z),$$

ce qui peut s'écrire

$$2x(x - 2) + (y + z + u)(x - 1) + yz = 0.$$

En prenant $x \geqslant 2$, le premier membre de cette équation est essentiellement positif; il faut donc que $x = 1$. Dans cette hypothèse, l'équation devient indépendante de u; elle se réduit à $yz = 2$, ce qui entraîne $y = 1$, $z = 2$.

Les trois plus petits des quatre nombres demandés sont donc 1, 2, 3, le plus grand pouvant être choisi à volonté.

QUESTION 403

Solution par M. W. J. Greenstreet M. A.

Si l'on projette un foyer d'une conique sur la tangente et sur la normale en un point de la courbe; puis, ce dernier point sur l'axe focal:

Les deux premières projections seront en ligne droite avec le centre.

De la troisième, leur distance sera vue sous un angle droit.

Dans l'angle formé avec l'axe par la droite qu'elles déterminent, la normale et la droite joignant la deuxième projection à la troisième seront anti-parallèles.

(*) Ce problème est celui qui constitue la question 411.
Cette question a été résolue par MM. B. Sollertinsky; Svechnicoff, à Troïtzk; Youssoufian, à Constantinople; Ch. Michel.

Les distances du centre à ces deux dernières projections seront entre elles dans un rapport égal à l'excentricité, d'où résulte, sans calcul, le rapport connu de la différence ou de la somme des rayons vecteurs d'un point d'une conique à la distance de ce point au second axe. (A. Tissot.)

Abaissons les perpendiculaires du foyer S, sur les droites PT, PG, YK; soient Y, K, L les pieds de ces perpendiculaires. Abaissons encore CZ, PN perpendiculaires à l'axe.

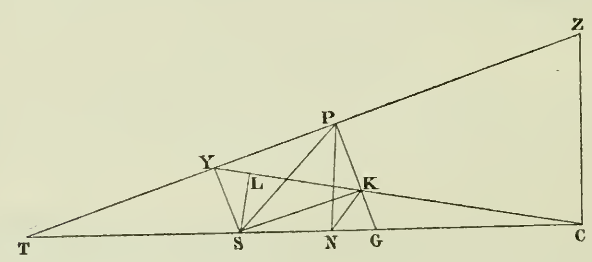
1° On a $\widehat{SYP} = \widehat{PNS} = \widehat{PKS} = \widehat{YPK}$,
d'où l'on conclut que Y, P, K, N, S, sont concycliques.

La droite YLK est la ligne de Simson de S par rapport au triangle PYK, dans la circonférence circonscrite au quadrilatère SYPN ; et comme $\widehat{SYZ} = \widehat{SCZ}$, les points Y, S, C, Z sont concycliques, et nous concluons que YLC est la ligne de Simson de S, par rapport au triangle YZC.

Ainsi Y, K, C sont colinéaires.

2° $\widehat{YNK} = \widehat{ZPK} = 90°$:

3° $\widehat{KNG} = 90° - \widehat{PNK} = 90° - \widehat{PYK} = \widehat{PKY} = \widehat{GKC}$
PG et NG sont antiparallèles dans l'angle C.



4° $\widehat{NKY} = \widehat{YST}$ (parce que SKNS est inscriptible),
$= 90° - \text{YTS} = \text{PGS}$;

$\widehat{KNC} = 180° - \widehat{SNK} = \widehat{SPG}$ (parce que SNKP est inscriptible).

$$\frac{KC}{CN} = \frac{\sin \widehat{KNC}}{\sin \widehat{NKC}} = \frac{\sin \widehat{SPG}}{\sin \widehat{PGS}} = \frac{SG}{SP} = \frac{SA}{AX} = \text{''excentricité}$$

De là résulte, sans difficulté, le rapport demandé.

QUESTION 405

Solution par M. B. Sollertinsky.

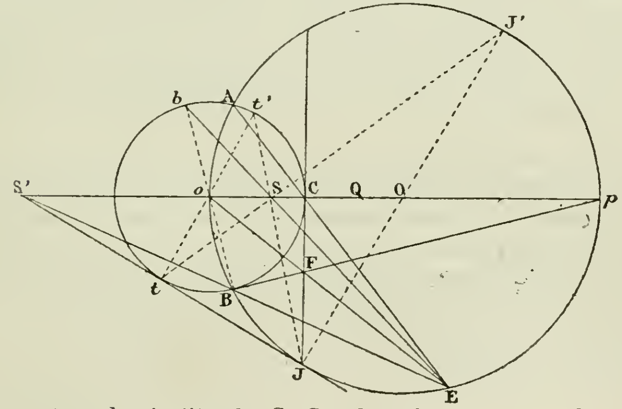
Deux circonférences tracées sont telles que l'une Δ passe par le centre de l'autre δ. Construire, AVEC LA RÈGLE SEULE, *les centres de ces circonférences, leurs centres de similitude, la tangente commune et ses points de contact.*

Soient A, B les points d'intersection des circonférences Δ, δ. On peut trouver, avec la règle seule, les pôles p, Q de AB, par rapport à δ, Δ. L'un de ces points p se trouve sur la circonférence Δ qui passe par le centre de l'autre. Ce *centre o* est l'intersection de pQ avec Δ.

Soient C le point où le diamètre po rencontre δ, E l'intersection de AC avec Δ. Les angles $\widehat{pAC}$, $\widehat{CAB}$ étant égaux, E est le milieu de l'arc Bp. De là résulte que :

1° OE est la bissectrice de l'angle $\widehat{COB}$ et par suite rencontre Bp en un point F appartenant à la tangente CF; mais cette tangente rencontre Δ au point J de son contact avec la tangente commune. (Qu. 383.)

2° Soit b le point, sur δ, diamétralement opposé à B. Les arcs pE, BC étant semblables, les droites Eb, EB rencontrent po



aux centres de similitude S, S'. On mène ensuite JSt', $t'ot$: t est l'autre point de contact.

Enfin, on trace tSJ', JJ' : l'intersection des droites po, JJ' est le centre O de Δ.

QUESTIONS PROPOSÉES(*)

451. — D'un point quelconque M du plan d'un angle BOB égal à 60°, on abaisse les perpendiculaires MB, MB′, MA sur les côtés OB, OB′ et sur la bissectrice OA de cet angle. Démontrer que

$$OB = MB' - MB.$$

452. — La somme algébrique des distances des trois sommets d'un triangle et de l'orthocentre à une droite quelconque passant par le centre du cercle d'Euler est nulle.

453. — Dans tout triangle, toute hauteur φ_a est moyenne harmonique entre les deux segments, déterminés sur la perpendiculaire au côté correspondant (la médiatrice) à cette hauteur menée par le milieu de ce côté, par les deux autres côtés, ces segments ayant pour origine commune le point milieu.

454. — Étant donnée une circonférence de diamètre AA′, on mène une corde quelconque B′B parallèle à ce diamètre. on prend la corde AM double de la distance des deux parallèles AA′, BB′; Démontrer que l'angle AA′C est double de l'angle AA′B, C étant un point quelconque situé sur le prolongement de MA′.

455. — Si, dans le plan d'un triangle rectangle, on mène par le sommet de l'angle droit une transversale quelconque, et par chacun des trois sommets, on mène dans le même sens de rotation, des droites faisant chacune avec cette transversale un angle égal à l'angle du triangle correspondant à ce ce sommet, ces trois droites sont concourantes.

(*) Par M. Lauvernay.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 20604-9-92.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, voir page 217.)

XXVIII. — Des points de Brocard Ω, Ω', et de leurs transformés ω, ω'.

1. *Les points de Brocard ont pour transformés les points où les parallèles* BA_1, CA_1 *à* AC, AB, *rencontrent les tangentes* CT, BT *à la circonférence* ABC.

Supposons le premier point de Brocard Ω défini par ses coordonnées angulaires $-C$, $-A$, $-B$. Les angles du triangle ωBC seront $A+C$, $B+A$, $C+B$, ou $-B$, $-C$, $-A$. Donc ω est le point de rencontre de BA_1, et CT. De même ω' est le point de rencontre des droites CA_1, BT.

ω *et* ω' *sont isogonaux*, comme on le voit par les angles $-B$, $-C$, $-A$; $-C$, $-A$, $-B$ des deux triangles ωBC, ω'BC, et comme cela doit être puisque Ω, Ω' le sont. De plus, $\omega\omega'$ est parallèle à $\Omega\Omega'$, et ω' est l'isocyclique de Ω, ω celui de Ω'.

Corollaire.—De la construction de ω, ω', on peut conclure: 1° Ω *est à la rencontre de la circonférence qui, tangente à* AB, *passe par* A *et* C, *avec la circonférence qui, tangente à* BC, *passe par* A *et* B; 2° Ω' *est à la rencontre de la circonférence qui, tangente à* AC, *passe par* A *et* B, *avec celle qui, tangente à* BC, *passe par* A *et* C.

2. *Coordonnées tripolaires de* ω, ω' *et coordonnées tripolaires correspondantes de* Ω, Ω'.

Le triangle ωBC est symétriquement semblable au triangle BCA. D'où

$$\frac{\omega B}{a} = \frac{\omega C}{c} = \frac{a}{b}.$$

On a ainsi deux des coordonnées tripolaires

$$\omega B = \frac{a^2}{b}, \qquad \omega C = \frac{ac}{b}.$$

La troisième est donnée par *la relation très simple*

$$\overline{\omega A}^2 - \overline{\omega C}^2 = a^2 + c^2.$$

En effet, soit K la projection de ω sur AC et H_a celle de A sur BC et observons qu'en prenant pour sens positif de CK le sens AC et de BH_a le sens BC, ces deux quantités CK, BH_a sont toutes les deux positives ou toutes les deux négatives, selon que l'angle B, pris au sens restrictif de la géométrie ordinaire, est aigu ou obtus. Ainsi le rapport $\frac{CK}{BH_a}$ est toujours positif; et, d'après la similitude de ABH_a, ωCK, il a pour valeur $\frac{\omega C}{c} = \frac{a}{b}$. Cela posé, l'égalité

$$\overline{\omega A}^2 = \overline{\omega C}^2 + b^2 + 2b.CK,$$

devient

$$\overline{\omega A}^2 - \overline{\omega C}^2 = b^2 + 2a.BH_a,$$

ou

$$\overline{\omega A}^2 - \overline{\omega C}^2 = a^2 + c^2.$$

De là, pour cette troisième coordonnée

$$b^2.\overline{\omega A}^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2.$$

On obtiendrait de même

$$\omega' B = \frac{ab}{c}, \ \omega, C = \frac{a^2}{c},$$

et

$$c^2\overline{\omega' A}^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2.$$

De ces formules, on déduit les coordonnées tripolaires de Ω et Ω' dont les valeurs absolues sont moins faciles à obtenir par voie directe,

$$\frac{\Omega A}{b^2c} = \frac{\Omega B}{c^2a} = \frac{\Omega C}{a^2b} = \frac{1}{b.\omega A} = \frac{1}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

$$\frac{\Omega' A}{c^2b} = \frac{\Omega' B}{a^2c} = \frac{\Omega' C}{b^2a} = \frac{1}{c.\omega' A} = \frac{1}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}.$$

De là, par suite, on déduit les côtés des podaires PQR, P'Q'R' de Ω et Ω' relativement à ABC, et l'expression du rayon ρ du cercle circonscrit aux deux podaires. Le premier de ces podaires est semblable à BCA et le rapport de similitude, $\frac{\rho}{R}$,

est aussi égal à

$$\frac{QR}{b} = \frac{a A\Omega}{2Rb}.$$

On obtient ainsi $$2\rho = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

ou $$\frac{1}{4\rho^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

3. *Coordonnées normales des points* ω, ω', Ω, Ω'; *puissances de ces points relativement à la circonférence* ABC *et rayons des cercles circonscrits à leurs podaires.*

En prenant les équations de BA_1 et CT, ou en utilisant des similitudes de triangles, évidentes, on trouve pour les coordonnées normales de ω

$$x = -\frac{2aS}{b^2}, \qquad y = \frac{2S}{b}, \qquad z = \frac{2a^2S}{b^2c};$$

et pour celles de ω'

$$x' = -\frac{2aS}{c^2}, \qquad y' = \frac{2a^2S}{c^2b}, \qquad z' = \frac{2S}{c}.$$

On en peut déduire celles de Ω et Ω' par les formules générales

$$X = \frac{bc}{\omega A^2}\cdot\frac{\omega_0}{2R}, \qquad \frac{Y}{z} = \frac{Z}{y} = \frac{bc}{\omega A^2}, \qquad \text{etc.}$$

Le point ω étant sur la tangente CT, on a

$$\omega_0 = \overline{C\omega}^2 = \frac{a^2c^2}{b^2}.$$

On obtient ainsi

$$\frac{aX}{\left(\frac{1}{b^2}\right)} = \frac{bY}{\left(\frac{1}{c^2}\right)} = \frac{cZ}{\left(\frac{1}{a^2}\right)} = \frac{2S}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{aX'}{\left(\frac{1}{c^2}\right)} = \frac{bY'}{\left(\frac{1}{a^2}\right)} = \frac{cZ'}{\left(\frac{1}{b^2}\right)},$$

formules dont la démonstration directe est connue.

Il y a lieu de remarquer l'expression des puissances Ω_0, Ω'_0. La formule du § XXIII, $\Omega_0\omega_0 = 4R^2Xx$ donne

$$\Omega_0 = -\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \Omega'_0.$$

On arriverait au même résultat, en partant de la propriété connue que Ω et Ω' sont équidistants de O, que par suite Ω_0

et Ω'_0 sont égaux et en appliquant la relation $\Omega_0.\Omega'_0 = 4R^2XX'$, qui a lieu pour deux points isogonaux quelconques.

En se reportant à la valeur du rayon ρ du cercle circonscrit aux podaires PQR, P'Q'R', donnée dans 2°, on a ce résultat remarquable

$$\Omega_0 = \Omega'_0 = -4\rho^2.$$

Géométriquement, ρ étant la distance du milieu de $\Omega\Omega'$ à chacun des points P, Q, R, 2ρ est la distance de Ω' à chacun des symétriques de Ω relativement aux trois côtés. Cette relation peut donc s'énoncer ainsi : *Si, par* Ω', *on élève une perpendiculaire à* Ω'O, *jusqu'à sa rencontre en* L *avec la circonférence* ABC; *le cercle décrit de* Ω' *comme centre, avec* Ω'L *pour rayon, passe par les symétriques de* Ω *relativement aux côtés de* ABC.

Si l'on appelle ρ_1 le rayon du cercle circonscrit aux podaires de ω, ω', relativement à ABC, on a, d'après le § XXIII,

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{X}{x} = -\frac{4\rho^2}{a^2},$$

d'où $a^2 = -4\rho\rho_1$. Dans cette relation remarquable le signe $-$, comme il a été expliqué au § XXIII, rappelle que les sens de rotation sont contraires pour le podaire de Ω et pour celui de ω.

Enfin les distances $\omega\omega'$ et $\Omega\Omega'$ peuvent se déduire du théorème exprimé, § XXIII, par l'égalité $M_k = -T$. Soit par exemple $\omega\omega'$. M_k désigne la puissance de M relativement au cercle circonscrit à son podaire, ici M_k est $\frac{\omega\omega'^2}{4} - \rho_1^2$, et T désigne xx' ou $\frac{4a^2S^2}{b^2c^2}$. On a donc

$$\omega\omega'^2 = 4\rho_1^2 - \frac{16a^2S^2}{b^2c^2}.$$

Or $$4\rho_1^2 = \frac{a^4}{4\rho^2} = \frac{a^2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)}{b^2c^2},$$

donc

$$\omega\omega'^2 = \frac{a^2}{b^2c^2}(a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2).$$

On en peut déduire $\Omega\Omega'$ par la relation

$$\frac{\Omega\Omega'}{\omega\omega'^2} = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{4\rho^2}{a^2}.$$

D'où $\overline{\Omega\Omega'}^2 = \dfrac{a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2)^2}{(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)^3}$.

On rapprochera ces résultats de l'expression de OG'.

On a

$$\overline{OG'}^2 = \frac{4R^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}(a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2)$$

d'où

$$\frac{OG'}{\omega\omega'} = \frac{2Rbc}{a(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

4. *Les circonférences* $CA_1\varpi$, $BA_1\varpi'$ *sont tangentes à* BC *et se coupent en* Δ. *Les circonférences* $B\omega\Omega$, $C\omega\Omega'$ *sont tangentes à la circonférence* ABC *et se coupent en* d.

En effet, $C\omega$ est antiparallèle à CA_1, relativement à l'angle A_1CB et, par suite, la circonférence $CA_1\omega$ est tangente, en C, à BC; de même la circonférence $BA\omega'$ est tangente à BC. Ces deux circonférences (voir § VII, 5°) se coupent donc en un point qui est la projection de l'orthocentre du triangle A_1BC sur la médiane A_1D. Comme le triangle A_1BC est symétrique de ABC, relativement à D, ce point de rencontre est le symétrique, relativement à D, du point φ du triangle ABC ; et l'on sait, d'après ce même §, que ce symétrique est le point Δ où la médiane AD rencontre la circonférence ABC. Ou, plus simplement, l'orthocentre de A_1BC est l'extrémité S du diamètre issu de A dans la circonférence ABC; Δ est donc sa projection sur ADA_1.

La seconde partie du théorème se déduit de la première par inversion symétrique.

5. *Transformé du diamètre de Brocard. — Si* α *est la rencontre de* $\omega\omega'$ *et* BC, *la circonférence décrite de* α, *comme centre, avec* αA *pour rayon, est la transformée de la droite* OG' *et les points* ω, ω' *sont conjugués relativement à cette circonférence.*

Cette propriété peut se déduire, par inversion symétrique, de ce que les points de Brocard Ω, Ω' sont symétriques, relativement à OG'. Il s'ensuit que ω, ω' sont conjugués relativement à la circonférence, transformée de OG'. Cette circonférence a donc son centre sur $\omega\omega'$, et comme elle passe par A et par A' transformé de O, ce centre est également sur BC. Il est donc en α, et αA est le rayon.

Il est clair que cette circonférence passe aussi par g'.

Nous allons indiquer une démonstration directe du théorème; alors, la remarquable propriété que Ω, Ω' sont symétriques relativement à OG', en résultera.

Voyons d'abord la situation de α sur BC. Le théorème de Ménélaüs appliqué à la transversale $\alpha\omega\omega'$, du triangle A_1BC, donne

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\omega B_1}{\omega A_1}\,\frac{\omega' A_1}{\omega' C}.$$

Or $\quad B\omega = \dfrac{a^2}{b}, \qquad \omega A_1 = \omega B + BA_1 = \dfrac{b^2 - a^2}{b};$

d'où $\dfrac{\omega B}{\omega A_1} = \dfrac{a^2}{a^2 - b^2};$ et, de même, $\dfrac{\omega' C}{\omega' A_1} = \dfrac{a^2}{a^2 - c^2},$

Donc
$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}.$$

Nous allons montrer maintenant que la circonférence décrite. de α comme centre, avec αA pour rayon, passe par g'; et, à cet effet, nous établirons que la projection L, de α sur Ag est au milieu de Ag'.

De l'égalité
$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2},$$

on tire
$$\frac{2D\alpha}{a} = \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{b^2 - c^2};$$

et, comme
$$b^2 - c^2 = 2aH_aD,$$

on a
$$D\alpha . H_aD = \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{4} = \frac{3a^2 - 4m^2}{8}.$$

La similitude de DAH_a, $D\alpha L$ donne

$$\frac{D\alpha}{AD} = \frac{DL}{H_aD},$$

et l'on voit, de plus. que DL et AD ont le même sens ou de sens contraires en même temps que $D\alpha$ et H_aD, de sorte que cette égalité, comme les précédentes, a lieu en grandeur et en signe. De là on tire

$$2DL = \frac{3a^2}{m} - m = Dg' - AD.$$

Ceci prouve que L est le milieu de Ag', et qu'ainsi la circonférence α passe par g'. Passant en A et ayant son centre sur

BC, elle passe aussi en A′. C'est donc la transformée de la droite OG′.

Nous allons faire voir, en troisième lieu, que l'antiparallèle Aβ, à Aα, relativement à l'angle A, est parallèle à ωω′.

On a, en effet, pour le pied β de cette antiparallèle :

$$\frac{\beta B}{\beta C} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Or, si γ est le point où la parallèle, menée par A_1, à ωω′, rencontre BC, on a

$$\frac{\gamma B}{\alpha B} = \frac{BA_1}{B\omega} = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\frac{\gamma C}{\alpha C} = \frac{CA_1}{C\omega'} = \frac{c^2}{a^2},$$

d'où

$$\frac{\gamma C}{\gamma B} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{c^2}{b^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\gamma C}{\gamma B} = \frac{\beta B}{\beta C}.$$

Ainsi γ est la symétrique de β relativement à D, et Aβ est parallèle à $A_1\gamma$, c'est-à-dire parallèle à ωω′.

Nous pouvons maintenant conclure.

La droite ΩΩ′, parallèle à ωω′, l'est à Aβ ; sa transformée, la circonférence Aωω′, est donc tangente à Aα, transformée de Aβ; enfin, on a $\alpha\omega . \alpha\omega' = A\alpha^2$, c'est-à-dire que ω, ω′ sont conjugués relativement à la circonférence α. Donc Ω, Ω′ sont symétriques relativement à OG′.

Corollaire. — *Si* B′, C′ *sont* (comme dans § XXVI, 2°), *les extrémités des antiparallèles menées par* B, *à* BA, *relativement à l'angle* C; *et, par* C, *à* CA, *relativement à l'angle* B ; *la droite* B′C′ *est perpendiculaire sur* OG′.

Car B′ et C′ sont les symétriques de ω et ω′ relativement à D et, de plus, B′C′ est parallèle à ωω′.

On voit aussi par là que si l'on considère les points B_1', C_1', du même paragraphe ; $\omega B_1'$ et $\omega' C_1'$ sont parallèles à BC et égaux à BC.

(A suivre.)

DISTANCES DES POINTS REMARQUABLES
DANS LE TRIANGLE

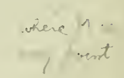
Par M. **Aug. Boutin.**

Remarques générales. — Nous avons réuni dans le tableau ci-après, un certain nombre de formules donnant la longueur du segment dont les extrémités sont constituées par deux points remarquables du triangle. L'expression de cette distance peut prendre des formes très diverses suivant les éléments qui y figurent. Nous avons, autant que possible, choisi la forme la plus condensée.

Parmi ces formules, quelques-unes sont classiques ; d'autres, moins connues, ont été données par divers géomètres ; enfin quelques-uns sont le fruit de nos recherches personnelles. Nous serions heureux de pouvoir compléter ce tableau par d'autres formules qui ont pu nous échapper, et nous prions nos lecteurs de nous les adresser.

Parmi les distances de ce genre, certaines sont, pour ainsi dire, irréductibles; d'autres, se déduisent des premières par des relations très simples. Nous faisons suivre nos formules d'une liste de ces relations; il y aurait intérêt à pousuivre celle-ci.

Nous désignons par O, H, K, O_9, I, I', V, W, V_2, W_2, G, Γ, ν, Γ'_a, ν'_a, Ω, Ω', Z, Q, C_I, $C_{I'}$, P_1, P_2, R, N, M_0, M_2, S, R, r, r', θ, φ, respectivement le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre, le point de Lemoine, le centre du cercle des neuf points, le centre du cercle inscrit, celui du cercle ex-inscrit tangent à a, le premier et le second isodynamique, le premier et le second isogone, le centre de gravité, le point de Gergonne, le point de Nagel, le premier point du groupe de Gergonne, le premier point du groupe de Nagel, les points de Brocard, le centre du cercle de Brocard, le centre de l'hyperbole de Kiepert, le point de contact des cercles I et O_9, I' et O_9, les milieux de VV_2, WW_2, le point de Steiner, le point de Tarry, le réciproque et l'inverse de M, la surface, les rayons des cercles circonscrit, inscrit et ex-



inscrit (relatif à a) l'angle de Brocard, et, enfin, l'angle (*) donné par la formule

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C.$$

Ceci posé :

$$OI = \sqrt{R(R - 2r)},$$

$$OI' = \sqrt{R(R + 2r')},$$

$$O_9I = \frac{1}{2}(R - 2r),$$

$$O_9I' = \frac{1}{2}(R + 2r'),$$

$$O\nu = R - 2r,$$

$$O\nu'_a = R + 2r',$$

$$\overline{OH}^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C),$$

$$= 9R^2 + 2r^2 + 8Rr - 2p^2,$$

$$\overline{HI}^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2,$$

$$\overline{HI'}^2 = 4R^2 - 4Rr' + 3r'^2 - (p - a)^2,$$

$$\overline{O\Gamma}^2 = R^2 - \frac{4Sp(R + r)}{(4R + r)^2},$$

$$\overline{H\Gamma}^2 = 4R^2 - \frac{8p^2R(2R - r)}{(4R + r)^2},$$

$$\overline{H\Gamma'_a}^2 = 4R^2 - \frac{8(p - a)^2R(2R + r')}{(4R - r')^2},$$

$$9\overline{GI}^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr,$$

$$9\overline{GI'}^2 = (p - a)^2 + 5r'^2 + 16Rr',$$

$$\overline{KI}^2 = \frac{2Rr^2(4R + r)}{S \operatorname{cotg} \theta} - 3R^2 \operatorname{tg}^2 \theta,$$

$$\overline{KH}^2 = R^2 [\operatorname{tg}^2 \theta - 4 \cos A \cos B \cos C (1 - \operatorname{tg}^2 \theta)],$$

$$9\overline{KG}^2 = \frac{4S(1 + 2 \sin^2 \theta)}{\sin 2\theta} - 27R^2 \operatorname{tg}^2 \theta.$$

Dans les formules suivantes $\delta = 4R + r$,

$$\overline{\Omega I}^2 = 2Rr\left[\frac{a^3c + b^3a + c^3b}{(p^2 - r\delta)^2 + 4S^2} - 1\right],$$

$$\overline{\Omega\, I}^2 = 2Rr\left[\frac{a^3b + b^3c + c^3a}{(p^2 - r\delta)^2 + 4S^2} - 1\right],$$

(*) M. Boutin, à diverses reprises, a montré l'utilité qu'il y avait à introduire l'angle φ, dans cette Géométrie du triangle à laquelle il s'est appliqué avec un zèle dont nos lecteurs sont depuis longtemps les témoins.

Pour cette raison, on pourrait, il me semble, donner à cet angle φ le nom d'*Angle de Boutin*. G. L.

$$\Omega O = \Omega' O = R\sqrt{1 - 4\sin^2\theta},$$

$$= R\sqrt{\frac{(p^2 - r\delta)^2 - 12S^2}{(p^2 - r\delta)^2 + 4S^2}},$$

$$I\Gamma = \frac{r}{\delta}\sqrt{\delta^2 - 3p^2},$$

H' étant l'anticomplémentaire de H

$$H'I = \sqrt{\delta^2 - 3p^2},$$

$$H'\Gamma = \frac{\delta + r}{\delta}\sqrt{\delta^2 - 3p^2},$$

ω, ω_1 étant les centres des deux cercles tangents à trois cercles décrits des sommets comme centres et tangents deux à deux. M. Lemoine a donné, pour les coordonnées barycentriques de ces points,

$$\alpha : \beta : \gamma = r' \pm a : \ldots,$$

$$\omega\Gamma = \frac{2S}{\delta(\delta + 2p)}\sqrt{\delta^2 - 3p^2},$$

$$\omega I = \frac{r}{2p + \delta}\sqrt{\delta^2 - 3p^2},$$

$$\omega_1\Gamma = \frac{2S}{\delta(2p - \delta)}\sqrt{\delta^2 - 3p^2},$$

$$\omega_1 I = \frac{r}{2p - \delta}\sqrt{\delta^2 - 3p^2},$$

$$O\Gamma_2 = \frac{R}{R + r}\sqrt{R(R - 2r)},$$

$$O\nu_2 = \frac{R}{R - r}\sqrt{R(R - 2r)},$$

$$I\Gamma_2 = \frac{r}{R + r}\sqrt{R(R - 2r)},$$

$$I\nu_2 = \frac{r}{R - r}\sqrt{R(R - 2r)},$$

$$\Gamma_2\nu_2 = \frac{2Rr}{R^2 - r^2}\sqrt{R(R - 2r)},$$

$$O\nu'_{a,2} = \frac{R}{R + r'}\sqrt{R(R + 2r')},$$

$$I\nu'_{a,2} = \frac{r'}{R + r'}\sqrt{(R + 2r')R},$$

$$O\Gamma'_{a,2} = \frac{R}{R - r'} \sqrt{R(R + 2r')},$$

$$I\Gamma'_{a,2} = \frac{r'}{R - r'} \sqrt{R(R + 2r')},$$

$$\Gamma'_{a,2}\gamma'_{a,2} = \frac{2Rr'}{R^2 - r'^2} \sqrt{R(R + 2r')},$$

$$II' = 4R \sin \frac{A}{2},$$

$$I''I''' = 4R \cos \frac{A}{2},$$

$$C_I C_{I'} = \frac{R(b - c)}{2\sqrt{(R - 2r)(R + 2r')}},$$

$$C_{I''} C_{I'''} = \frac{R(b + c)}{2\sqrt{(R + 2r'')(R + 2r''')}},$$

$$\overline{OH_0}^2 = R^2(1 - 4 \operatorname{tg}^2 \theta . \Sigma \cos^2 A),$$

$$\Omega\Omega' = 2R \sin \theta \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta},$$

$$OK = \frac{R}{\cos \theta} \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta},$$

$$\Omega K = \Omega' K = R \operatorname{tg} \theta \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta},$$

$$OV = R\sqrt{\frac{\operatorname{cotg} \theta - \sqrt{3}}{\operatorname{cotg} \theta + \sqrt{3}}},$$

$$OW = R \sqrt{\frac{\operatorname{cotg} \theta + \sqrt{3}}{\operatorname{cotg} \theta - \sqrt{3}}},$$

$$VW = \frac{2R\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 \theta - 3}},$$

$$\overline{OV_2}^2 = R^2 - \frac{S(3\sqrt{3} + \sqrt{3} \operatorname{cotg} \theta \operatorname{tg} \varphi + 4 \operatorname{tg} \varphi)}{3 \operatorname{tg} \varphi(\sqrt{3} + \operatorname{cotg} \theta)},$$

$$\overline{OW_2}^2 = R^2 - \frac{S(4 \operatorname{tg} \varphi - 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \operatorname{cotg} \theta \operatorname{tg} \varphi)}{3 \operatorname{tg} \varphi (\cot \theta - \sqrt{3})},$$

$$\overline{VV_2}^2 = \frac{2S(\operatorname{cotg} \theta - 9 \operatorname{cotg} \varphi)}{3(\operatorname{cotg} \theta + \sqrt{3})^2}.$$

$$\overline{WW_2}^2 = \frac{2S(\operatorname{cotg} \theta - 9 \operatorname{cotg} \varphi}{3(\operatorname{cotg} \theta - \sqrt{3})^2},$$

$$\overline{V_2W_2}^2 = \frac{2S(\cot\theta - 9\cot\varphi)}{3(\cot^2\theta - 3)},$$

$$\overline{P_1P_2}^2 = \frac{2S}{\cot^2\theta - 3}(4\cot^3\theta - 15\cot\theta + 27\cot\varphi),$$

$$KV = R\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{\frac{\sin(30^\circ - \theta)}{\sin(30^\circ + \theta)}},$$

$$KW = R\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{\frac{\sin(30^\circ + \theta)}{\sin(30^\circ - \theta)}},$$

$$\overline{KV_2}^2 = \frac{S(\cot\theta - 9\cot\varphi)}{6\cot^2\theta}\cdot\frac{\sin(30^\circ - \theta)}{\sin(30^\circ + \theta)},$$

$$\overline{KW_2}^2 = \frac{S(\cot\theta - 9\cot\varphi)}{6\cot^2\theta}\cdot\frac{\sin(30^\circ + \theta)}{\sin(30^\circ - \theta)},$$

$$\overline{KP_1}^2 = \frac{S(4\cot^3\theta - 15\cot\theta + 27\cot\varphi)}{6\cot^2\theta(\cot\theta + \sqrt{3})^2},$$

$$\overline{KP_2}^2 = \frac{S(4\cot^3\theta - 15\cot\theta + 27\cot\varphi)}{6\cot^2\theta(\cot\theta - \sqrt{3})^2},$$

$$GP_1 = \frac{\cot\theta}{\sqrt{3}}\cdot KP_1,$$

$$GP_2 = \frac{\cot\theta}{\sqrt{3}}\cdot KP_2$$

$$\overline{VW_2}^2 = \frac{8S}{3(\cot\theta + \sqrt{3})},$$

$$\overline{V_2W}^2 = \frac{8S}{3(\cot\theta - \sqrt{3}},$$

$$\overline{GV_2}^2 = \frac{2S}{3}(\cot\theta - \sqrt{3});$$

$$\overline{GW_2}^2 = \frac{2S}{3}(\cot\theta + \sqrt{3}).$$

$$GV = \frac{\cot\theta - \sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{2S}{\cot\theta + \sqrt{3}}},$$

$$GW = \frac{\cot\theta + \sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{2S}{\cot\theta - \sqrt{3}}},$$

Soient L_2, L'_2, M_2, M'_2, les points dont les coordonnées normales sont $x : \sin(A \pm 30^\circ)$ et en général : $x : \sin(A \pm \lambda)$

$$\overline{OL_2}^2 = \frac{3R^2(\cot g^2\theta - 3)}{(\sqrt{3}\cot g\,\theta + 1)^2},$$

$$\overline{OL'_2}^2 = \frac{3R^2(\cot g^2\theta - 3)}{(\sqrt{3}\cot g\,\theta - 1)^2},$$

$$KL_2 = \frac{R\sqrt{\cot g^2\theta - 3}}{\cot g\,\theta\,(\sqrt{3}\cot g\,\theta + 1)},$$

$$KL'_2 = \frac{R\sqrt{\cot g^2\theta - 3}}{\cot g\,\theta\,(\sqrt{3}\cot g\,\theta - 1)},$$

$$L_2L'_2 = \frac{2R\sqrt{3}\sqrt{\cot g^2\theta - 3}}{3\cot g^2\theta - 1},$$

$$OM_2 = \frac{R\cot g\,\lambda\sqrt{\cot g^2\theta - 3}}{1 + \cot g\,\lambda\cot g\,\theta},$$

$$OM'_2 = \frac{R\cot g\,\lambda\sqrt{\cot g^2\theta - 3}}{\cot g\,\lambda\cot g\,\theta - 1},$$

$$KM_2 = \frac{R\sqrt{\cot g^2\theta - 3}}{\cot g\,\theta\,(\cot g\,\theta\cot g\,\lambda + 1)},$$

$$KM'_2 = \frac{R\sqrt{\cot g^2\theta - 3}}{\cot g\,\theta\,(\cot g\,\lambda\cot g\,\theta - 1)},$$

$$M_2M'_2 = \frac{2R\cot g\,\lambda\sqrt{\cot g^2\theta - 3}}{\cot g^2\theta\cot g^2\lambda - 1}.$$

Soit D_2 le pôle de $\Omega\Omega'$ par rapport au cercle de Brocard et D' le milieu de $\Omega\Omega'$.

$$OD' = R\cos\theta\sqrt{1 - 4\sin^2\theta},$$

$$KD' = R\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{1 - 4\sin^2\theta},$$

$$OD_2 = \frac{R\cot g\,\theta}{\cot g^2\theta - 1}\sqrt{\cot g^2\theta - 3}.$$

$$KD_2 = \frac{R\sqrt{\cot g^2\theta - 3}}{\cot g\,\theta\,(1 - \cot g^2\theta)}.$$

$$D'D_2 = \frac{2R\cot g\,\theta\sqrt{\cot g^2\theta - 3}}{\cot g^4\theta - 1}.$$

$$OK_0 \text{ ou } OD = R(1 - 4\sin^2\theta),$$

$$K_0R = 4R\sin^2\theta,$$

$$K_0N = 2R\,(1 - 2\sin^2\theta),$$

$$\Omega D_2 = \Omega' D_2 = \frac{\Omega\Omega'}{2}\cos 2\theta.$$

Soient σ, σ', les centres de similitude des cercles circonscrit et de Brocard.

$$O\sigma = \frac{R\sqrt{\cot^2\theta - 3}}{2\cot\theta + \sqrt{\cot^2\theta - 3}},$$

$$O\sigma' = \frac{R\sqrt{\cot^2\theta - 3}}{2\cot\theta - \sqrt{\cot^2\theta - 3}},$$

$$Z\sigma = \frac{R\,(\cot^2\theta - 3)}{2\cot\theta\,(2\cot\theta + \sqrt{\cot^2\theta - 3})},$$

$$Z\sigma' = \frac{R\,(\cot^2\theta - 3)}{2\cot\theta\,(2\cot\theta - \sqrt{\cot^2\theta - 3})},$$

$$\sigma\sigma' = \frac{2R}{3}\,(1 - 4\sin^2\theta).$$

Dans les deux formules suivantes, M désigne un point dont les coordonnées normales sont proportionnelles à $r + l\cos A$, etc.

$$OM = \frac{R}{R + l}\sqrt{R(R - 2r)},$$

$$IM = \frac{l}{R + l}\sqrt{R(R - 2r)}.$$

Soient Ψ, J, les points dont les coordonnées normales sont :

$x : \cos B + \cos C \ldots \quad x : \operatorname{tg}\frac{A}{2} \ldots$

$$O\Psi = (R + r)\sqrt{\frac{R - 2r}{R}},$$

$$I\Psi = r\sqrt{\frac{R - 2r}{R}}.$$

$$OJ = \frac{2R + r}{2R - r}\sqrt{R(R - 2r)},$$

$$IJ = \frac{2r}{2R - r}\sqrt{R(R - 2r)},$$

$$\overline{\Gamma\nu}^2 = \frac{16R}{\delta^2}\,[p^2(R + r) - r\delta^2],$$

$$I_0\Gamma = \frac{p^2}{p^2 + r\delta}\,.\overline{\Gamma\nu},$$

$$H_0\Gamma = \frac{p^2}{p^2 - r\delta}\,.\overline{\Gamma\nu},$$

$$I_0H_0 = \frac{2p^2r\delta}{p^4 - r^2\delta^2}\,.\overline{\Gamma\nu},$$

$$H_0\nu = \frac{r\delta}{p^2 - r\delta}\,.\overline{\Gamma\nu}.$$

Distance des centres isologiques

$$\Delta^2 = \frac{\Sigma 2b^4c^4 - \Sigma a^8}{\Sigma a^6 - \Sigma a^4b^2 + 3a^2b^2c^2} = \frac{32S}{\operatorname{tg}\varphi - 9\operatorname{tg}\theta}.$$

Distance des points de Jérabeck

$$\Delta^2 = \frac{abc}{(\Sigma bc)^2}(\Sigma a^3 - \Sigma a^2b + 3abc),$$

$$\overline{\Omega G}^2 = \frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2}{3\Sigma a^2b^2} - \frac{4}{9}S\operatorname{cotg}\theta,$$

$$\overline{\Omega' G}^2 = \frac{a^4c^2 + b^4a^2 + c^4b^2}{3\Sigma a^2b^2} - \frac{4}{9}S\operatorname{cotg}\theta,$$

$$\overline{IR}^2 = \frac{abc(\Sigma ab^2 - \Sigma a^3) - \Sigma b^3c^3}{\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4} - 4Rr,$$

$$\overline{IN}^2 = \frac{abc(\Sigma a^3 - \Sigma ab^2) + \Sigma b^3c^3}{\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4} + 4R^2,$$

$$\overline{KR}^2 = \frac{S[17\cot^2\theta - 4\operatorname{cotg}^4\theta - 7 - \operatorname{tg}\theta\operatorname{cotg}\varphi(25\operatorname{cotg}^2\theta - 3)]}{2\operatorname{cotg}\theta(3 - \operatorname{cotg}^2\theta)},$$

$$\overline{KN}^2 = 2R^2(2 - 3\operatorname{tg}^2\theta) - \overline{KR}^2.$$

$$\overline{OQ}^2 = \frac{R^2(\operatorname{cotg}^2\theta - 12) + 4S\operatorname{cotg}\theta}{\operatorname{cotg}^2\theta - 3},$$

$$OJ_2 = \frac{1}{2}H\Gamma,$$

$$\overline{IJ_2}^2 = \frac{4Rp^2(R + r)}{\delta^2} - 4Rr, \quad (*)$$

$$\overline{O\Gamma_a'}^2 = R^2 + \frac{4S(p - a)(R - r')}{\delta_a^2}.$$

(*) Pour la plupart des formules suivantes, voir : E. Lemoine (A. F. Congrès de Marseille, 1891).

$$\overline{\mathrm{I}\Gamma'_a}^2 = r'^2 - \frac{3\mathrm{S}^2}{\delta_a^2},$$

$$\Gamma'\nu'_a = 3\mathrm{G}\Gamma',$$

$$\Gamma'_a\nu'_a = \frac{16\mathrm{R}}{\delta_a^2}\,[(p-a)^2(\mathrm{R}-r') + r'\delta_a^2],$$

$$\overline{\mathrm{GJ}}^2 = \frac{1}{9(2\mathrm{R}-r)^2}\,[p^2(2\mathrm{R}-r)(2\mathrm{R}+5r) - r\delta^3],$$

$$\overline{\mathrm{GJ}_a}^2 = \frac{1}{9(2\mathrm{R}+r')^2}\,[(p-a)^2(2\mathrm{R}+r')(2\mathrm{R}-5r') + r'\delta_a^3],$$

(J_a) $px = (p-c)y = (p-b)z \qquad (\delta_a = 4\mathrm{R} - r'),$

$$\mathrm{JJ}_2 = \frac{6\mathrm{R}}{\delta}.\mathrm{GJ},$$

$$\mathrm{J}_a\mathrm{J}_{a,2} = \frac{6\mathrm{R}}{\delta_a}.\mathrm{GJ}_a,$$

$$\mathrm{GJ}_2 = \frac{2\mathrm{R}-r}{\delta}.\mathrm{GJ},$$

$$\mathrm{GJ}_{a,2} = \frac{2\mathrm{R}+r'}{\delta_a}.\mathrm{GJ}_a,$$

$$\mathrm{OJ}_a = \frac{2\mathrm{R}-r'}{2\mathrm{R}+r'}.\mathrm{OI}',$$

$$\mathrm{I}'\mathrm{J}_a = \frac{2r'}{2\mathrm{R}+r'}.\mathrm{OI}',$$

$$\overline{\mathrm{OJ}_{a,2}}^2 = \frac{\mathrm{R}}{\delta_a^2}[\mathrm{R}\delta_a^2 + 2(2\mathrm{R}-r')(p-a)^2],$$

$$\overline{\mathrm{IJ}_{a,2}}^2 = \frac{4\mathrm{R}}{\delta_a^2}\,[(p-a)^2(\mathrm{R}-r') + r'\delta_a^2],$$

$$\overline{\Omega\Gamma'}^2 = 2\mathrm{R}r'\left[\frac{a^3c + b^3a - c^3b}{[(p-a)^2 + r'\delta_a]^2 + 4\mathrm{S}^2} + 1\right],$$

$$\overline{\Omega'\Gamma'}^2 = 2\mathrm{R}r'\left[\frac{a^3b - b^3c + c^3a}{[(p-a)^2 + r'\delta_a]^2 + 4\mathrm{S}^2} + 1\right],$$

$$\overline{\mathrm{HZ}}^2 = 4\mathrm{R}^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4\cot^2\theta}\right)(3\mathrm{R}^2 - 4\mathrm{S}\cot\theta),$$

J_2, $\mathrm{J}_{a,2}$ étant les complémentaires de Γ et Γ', on a

$$\mathrm{G}\Gamma = 2\mathrm{GJ}_2,$$

$$\mathrm{G}\Gamma'_a = 2\mathrm{GJ}_{a,2}.$$

$$\Gamma\mathrm{J}_2 = 3\mathrm{GJ}_2,$$

$$\Gamma'_a J_{a,2} = 3GJ_{a,2},$$

$$\overline{\Gamma'_a \nu'_a}^2 = \frac{16R}{\delta_a^2}[(p-a)^2(R-r') + r'\delta_a^2],$$

$$\overline{I'\Gamma'_a}^2 = r'^2 - \frac{3S^2}{\delta_a^2}.$$

Soit Δ la distance du point de Lemoine au point dont les coordonnées barycentriques sont

$$\alpha : \beta : \gamma = a^4 - b^2c^2 : \ldots$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{4S \cot\theta(1 + \cot^2\theta) - 27R^2}}{\cot\theta(1 - 4\sin^2\theta)}.$$

Soient G_p, G_{pa}, le centre radical des cercles ex-inscrits et des cercles I, I″, I‴.

$$IG_p = \frac{3}{2} IG, \qquad I'G_{pa} = \frac{3}{2} I'G$$

Soit Θ, le point dont les coordonnées normales sont :

$$x : y : z = 2a - p : \ldots\ldots$$

Θ_a le point

$$x : y : z = 3a + b + c : -a - 3b + c : -a + b - 3c;$$

$$G\Theta = 4\,GI, \qquad I\Theta = \frac{3}{4}\Theta G = 3GI,$$

$$G\Theta_a = 4GI', \qquad I'\Theta_a = \frac{3}{4}\Theta_a G = 3GI'.$$

Distance des isobariques du centre du cercle circonscrit :

$$\Delta^2 = 2S \cot\theta\,(1 - \cot^2\theta) + R^2(4\cot^2\theta - 3).$$

Distance des points λ, λ', qui sont, dans le triangle I′I″I‴, les isobariques du centre du cercle circonscrit à ce dernier triangle :

$$\Delta^2 = \frac{4R}{p^2}[p^2(R + r) - r\delta^2].$$

Distance des isobariques de I :

$$\Delta = \frac{r}{p}\sqrt{\delta^2 - 3p^2}.$$

Distance des isobariques de H égale le double de la distance des isobariques de O.

Distance des isobariques de K :

$$\Delta^2 = 9R^2 \,\mathrm{tg}^2\theta - 4S\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

Distance des points de Jérabek

$$\Delta = \frac{4\delta\sqrt{R(R-2r)}}{p^2 + r\delta},$$

Distance du point O au point $\alpha : \beta : \gamma = a^4 - b^2c^2 : \ldots.$

$$\Delta^2 = R^2 - \frac{48R^2 - 4S \operatorname{cotg}\theta(\operatorname{cotg}^2\theta + 1)^2}{(\operatorname{cotg}^2\theta - 3)^2}.$$

Des relations suivantes, on déduit d'autres distances :

$OH = 3.GO,$

$I\nu = 3.GI,$

$G\nu = 2.GI,$

$H\nu = 2.OI,$

$H_0\nu = 2.KI,$

$O_9K = \frac{1}{2} OH_0,$

$QG = \frac{1}{2} GR,$

$QH = QN,$

$H'N = 2OQ,$

$K_0H_0 = 2D'K,$

$K_0H = 2OD',$

$D'K = \frac{1}{2} RK_0,$

$H_0K = 3KG,$

$H_0G = 2KG,$

$HH_0 = 2OK,$

$QP_1 = \frac{1}{2} VW_2,$

$QP_2 = \frac{1}{2} WV_2,$

$GH = 2.OG.$

$HO_9 = OO_9 = \frac{1}{2} OH.$

$HH' = 2.OH,$

$\Omega D' = \Omega' D' = \frac{\Omega\Omega'}{2},$

$ZO = ZK = \frac{1}{2} OK,$

$2.O_9D' = OK_0,$

$GD = 2GD'.$

QUESTION 418

Solution par M. Auguste Poulain, à Angers.

On considère la circonférence qui passe par le sommet A *et par le point de Lemoine d'un triangle* ABC, *et qui coupe orthogonalement le cercle circonscrit. Démontrer qu'on a, pour tout point* M *de cette ligne,*

$$\frac{a^2.\overline{MA}^2}{b^2.\overline{MB}^2 - c^2.\overline{MC}^2} = \frac{m_a^2}{m_b^2 - m_c^2},$$

(a, b, c *désignant les côtés du triangle ;* m_a, ... *les médianes.)*

(L. Bénézech.)

Il s'agit de montrer qu'en coordonnées tripolaires, $\lambda = AM$ ..., l'équation du cercle mené par A et K, orthogonalement au cercle ABC, est

(1) $$\lambda^2a^2(m_b^2 - m_c^2) - (\mu^2b^2 - \nu^2c^2)m_a^2 = 0.$$

Or, en vertu de la dernière condition, l'équation est de la forme

(2) $p\lambda^2 + q\mu^2 + r\nu^2 = 0$. (voir *J. S.* 1889, p. 6).

Comme les coordonnées tripolaires de K sont (*J. S.* 1889, p. 130)

$$(3) \qquad \lambda_2 = \frac{4b^2c^2m_a}{(\Sigma a^2)^2}, \dots$$

Les deux premières conditions se traduisent par les relations;

$$(4) \qquad \frac{q}{b^2} + \frac{r}{c^2} = 0,$$

$$(5) \qquad m_a^2\frac{p}{a^2} + m_b^2\frac{q}{b^2} + m_c^2\frac{r}{c^2} = 0,$$

(6) On en tire $\dfrac{p}{a^2(m_c^2 - m_b^2)} = \dfrac{q}{b^2m_a^2} = \dfrac{r}{-c^2m_a^2}$;

et, par suite, l'équation (1). On sait aussi que les coordonnées barycentriques du centre sont les valeurs (6) de p, q, r.

Solution par M. L. Bénézech.

La question proposée est un corollaire du problème suivant :

Trouver, en coordonnées tripolaires, l'équation du cercle passant par le sommet A *du triangle de référence, par le point* $M_0(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ *et coupant orthogonalement le cercle circonscrit au triangle de référence.*

Cette équation s'obtient immédiatement en appliquant la relation qui existe entre les distances respectives de trois points quelconques (M_0, A, M) d'un cercle, à trois autres points quelconques (A, B, C) d'un deuxième cercle coupant orthogonalement le premier (Voir *J. E.* 1891, p. 6). L'équation cherchée est donc

$$\begin{vmatrix} \lambda_0^2 & \mu_0^2 & \nu_0^2 \\ o & c^2 & b^2 \\ \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou en développant $\lambda^2(b^2\mu_0^2 - c^2\nu_0^2) - \mu^2b^2\lambda_0^2 + \nu^2c^2\lambda_0^2 = 0$, équation qui peut s'écrire ainsi

$$\frac{\lambda^2}{b^2\mu^2 - c^2\nu^2} = \frac{\lambda_0^2}{b^2\mu_0^2 - c^2\nu_0^2}.$$

Dans la question proposée λ_0, μ_0, ν_0, étant les distances du point de Lemoine aux sommets du triangle de référence et ces quantités étant, comme on le sait, respectivement proportionnelles à $\frac{m_a}{a}, \frac{m_b}{b}, \frac{m_c}{c}$; on a bien

$$\frac{a^2\lambda^2}{b^2\mu^2 - c^2\nu^2} = \frac{m_a^2}{m_b^2 - m_c^2}.$$

Nota. — Autre solution par M. Sollertinsky.

QUESTION 420 (*)

1re solution. — *Soient* a, b, c *les longueurs des trois côtés* BC, CA, AB, *d'un triangle, et* α, β, γ *les angles que forment ces côtés avec une direction fixe quelconque, dans le plan, ces angles étant comptés de* o *à* 2π. *Démontrer qu'on a :*

$$a^3 \cos 3\alpha + b^3 \cos 3\beta + c^3 \cos 3\gamma = 3abc \cos(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$a^3 \sin 3\alpha + b^3 \sin 3\beta + c^3 \sin 3\gamma = 3abc \sin(\alpha + \beta + \gamma).$$

(Laisant.)

Si l'on projette le contour fermé ABC sur la direction donnée et sur la direction perpendiculaire, on a

$$(1) \qquad \Sigma a \cos \alpha = 0, \qquad \Sigma a \sin \alpha = 0.$$

On a d'ailleurs :

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$
$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha,$$
$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \Sigma \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$
$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \Sigma \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

et les égalités à démontrer deviennent, par substitution de ces valeurs :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma a^3 \cos^3 \alpha - 3\Sigma a^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \\ \quad = 3abc \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 3\Sigma abc \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ -\Sigma a^3 \sin^3 \alpha + 3\Sigma a^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ \quad = 3\Sigma abc \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - 3abc \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{array} \right.$$

(*) Nous donnons trois solutions de cette question. La première est de M. Boutin, la deuxième de M. Sollertinsky et la troisième, fondée sur les équipollences, de M. Laisant.

Posons pour abréger l'écriture :

$$a \cos \alpha = A, \qquad b \cos \beta = B, \qquad c \cos \gamma = C,$$
$$a \sin \alpha = B', \qquad b \sin \beta = B', \qquad c \sin \gamma = C',$$

(1) et (2) deviennent

$$(3) \qquad \Sigma A = 0, \qquad \Sigma A' = 0,$$

$$(4) \quad \begin{cases} \Sigma A^3 - 3\Sigma AA'^2 = 3ABC - 3\Sigma AB'C', \\ 3\Sigma A^2 A - \Sigma A'^3 = 3\Sigma A'BC - 3A'B'C', \end{cases}$$

mais on sait que $\Sigma A^3 - 3ABC$ est divisible par ΣA, et comme $\Sigma A = 0$, il en résulte $\Sigma A^3 - 3ABC = 0$; les identités (4) se réduisent à :

$$\Sigma AA'^2 - \Sigma AB'C' = 0,$$
$$\Sigma A^2 A' - \Sigma A'BC = 0,$$

elles peuvent s'écrire :

$$(\Sigma AA')(\Sigma A') - (\Sigma A'B')(\Sigma A) = 0,$$
$$(\Sigma AA'((\Sigma A) - (\Sigma AB)(\Sigma A') = 0;$$

et les relations (3) prouvent qu'elles sont identiquement nulles.

2e Solution. — On voit, sans peine, que $\pi - A = \gamma - \beta$, $\pi - B = \gamma - \alpha$, $\pi - C = \beta - \alpha$,

De là

$$\Sigma a^3 \cos 3\alpha = 8R^3 \Sigma \sin^3 A . \cos 3\alpha = - 8R^3 \Sigma \cos 3\alpha \sin^3(\beta - \gamma).$$

Or on sait que

$$\Sigma \cos 3x \sin^3 (y - z) \equiv 3\Sigma \cos^3 x \sin (y - z)$$
$$\equiv 3 \cos (x + y + z) \sin (y - z) \sin (z - x) \sin (x - y).$$

Par suite

$$\Sigma a^3 \cos 3\alpha \equiv 3 \cos(\alpha + \beta + \gamma) . 8R^3 \sin A \sin B \sin C \equiv 3abc \cos(\alpha + \beta + \gamma).$$

La seconde identité se déduit de celle-ci par la substitution

$$\alpha = \alpha' + \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \beta' + \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \gamma' + \frac{\pi}{2}.$$

3e Solution. — On a l'équipollence identique

$$BC^3 + CA^3 + AB^3 = 3BC.CA.AB,$$

car elle peut s'écrire

$$(C - B)^3 + A - C)^3 + (B - A)^3 = 3(C - B)(A - C)(B - A),$$

et se vérifie immédiatement sous cette forme.

Or $\qquad BC = a\varepsilon^{\alpha}, \quad CA = b\varepsilon^{\beta}, \quad AB = c\varepsilon^{\gamma}.$

Donc $\qquad a^3\varepsilon^{3\alpha} + b^3\varepsilon^{3\beta} + c^3\varepsilon^{3\gamma} = 3abc\varepsilon^{\alpha+\beta+\gamma},$

et, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on a les deux égalités de l'énoncé.

QUESTIONS PROPOSÉES (*)

456. — Soient A′, B′ C′ les deuxièmes points de rencontre des médianes d'un triangle avec la circonférence circonscrite et soient a_1, b_1, c_1, les longueurs des cordes B′C′, C′A′, A′B′, démontrer que l'on a

$$\frac{am_a}{a_1} = \frac{bm_b}{b_1} = \frac{cm_c}{c_1}.$$

457. — A, B, C étant les trois sommets d'un triangle équilatéral, MD la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque M du plan sur le côté BC, démontrer que

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{2MA}^2 = 3R(2MD - R).$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Puis, si l'on l'on suppose AB = AC, démontrer que le lieu du point M tel que la relation précédente ait lieu, est une droite parallèle à BC.

458. — Démontrer que le point symétrique de l'orthocentre par rapport à l'un quelconque C des sommets d'un triangle ABC, le centre du cercle circonscrit et le sommet C′ du parallélogramme construit sur les deux côtés CA, CB sont en ligne droite et que le centre du cercle circonscrit est le milieu de la distance des deux autres points.

459. — Si, par le milieu O de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, on mène une transversale quelconque rencontrant les côtés de l'angle droit AC, AB en β et γ, on a la relation

$$\frac{b^2}{\overline{O\gamma}^2} + \frac{c^2}{\overline{O\beta}^2} = 4.$$

460. — Si l'on a

$$a(p - a) + b(p - b) + c(p - c) = 4S,$$

S désignant l'aire du triangle ABC, les trois circonférences tangentes décrites de chacun des sommets, comme centres, avec

(*) Les cinq premières questions, ici proposées, étaient depuis longtemps composées et j'ignore à qui elles appartiennent. Si l'auteur veut bien se faire connaître, son nom sera publié, en même temps que la solution G. L.

$p-a$, $p-b$, $p-c$, pour rayons, sont tangentes à une même droite.

461. — Soit $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$ l'équation tripolaire d'une courbe. Démontrer que le point dont les coordonnées barycentriques sont $\frac{f'_{\lambda_0}}{\lambda_0}, \frac{f'_{\mu_0}}{\mu_0}, \frac{f'_{\nu_0}}{\nu_0}$ est situé sur la normale à la courbe, au point) λ_0, μ_0, ν_0.) *(Louis Bénézech.)*

462. — Soit M un point quelconque de la droite passant par les pieds des perpendiculaires abaissées, du centre du cercle inscrit à un triangle rectangle ABC, sur les côtés de l'angle droit. Démontrer que l'expression

$$\left(\overline{MB}^2 - \overline{MA}^2\right)\cos C + \left(\overline{MC}^2 - \overline{MA}^2\right)\sin C$$

est égale au double de l'aire du triangle considéré.

Louis Bénézech.

463. — Soient B, C et B′, C′ respectivement les extrémités d'un même diamètre dans deux circonférences ayant pour centre commun le point O et telles que le diamètre B′C′ de la plus petite soit égal au rayon R de l'autre.

Soit M un point de la plus petite circonférence, μ la projection de M sur BC, si je prends sur $M\mu$ un point A tel que $\overline{\mu A}^2 = \mu M\,(\mu M + 2R)$.

Le triangle ABC sera tel que la droite joignant les points de *Brocard* sera perpendiculaire à ABC. *(E. Lemoine).*

464. — Soient Γ, Γ' deux circonférences ; la ligne des centres coupe Γ aux points A, B, et Γ' aux points A′, B′.

Ayant pris, sur une droite Δ, perpendiculaire à AA′, un point mobile M, les droites MA, MA′ coupent Γ, Γ' respectivement aux points C, C′. Démontrer que la circonférence MCC′ passe par deux points fixes.

En supposant que Δ soit l'axe radical des circonférences considérées, démontrer que les circonférences telles que MCC′ coupent orthogonalement Γ, Γ' ; de sorte que les points fixes, signalés plus haut, sont, dans ce cas particulier, les POINTS DE PONCELET. *(A. Bienaymé).*

465. — On sait que $x - y$ passe par un minimum, si $\frac{x^m}{y^n} = k$, lorsque $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$.

Application. — Parmi tous les triangles isoscèles de même périmètre, déterminer celui pour lequel le cercle circonscrit est maximum. *(Lauvernay.)*

466. — Déterminer les côtés d'un trapèze isoscèle, connaissant son périmètre $2p$, sa surface a^2 et la surface latérale πb^2 engendrée par ce trapèze en tournant autour de la droite joignant les milieux des bases. *(Lauvernay.)*

467. — Démontrer que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb' = 0,$$

ne peuvent avoir une racine commune, sans que l'une d'elles ait ses racines égales. *(Lauvernay.)*

468. — Calculer les côtés d'un triangle, connaissant son périmètre $2p$, la somme δ^2 des carrés des côtés, et sachant que $$2bc = a(b + c).$$ *(Lauvernay.)*

469. — Résoudre l'équation :

$$\left(3 + \frac{1}{1 + 2x}\right)^2 = 4(1 - x)(1 + x)^2 + \left(2x^2 + 2x - 1 - \frac{1}{1 + 2x}\right)^2.$$

(Lauvernay.)

470. — Les points qui sont situés au tiers de chaque hauteur d'un triangle T, à partir de la base correspondante, forment un triangle T′, semblable à T.

Si, du triangle T′, on déduit de même le triangle T″; puis, du triangle T″, le triangle T‴, etc.... ; les triangles T, T′, T″, T‴,... ont même point de Lemoine.

Ces divers triangles sont d'ailleurs, *de deux en deux*, homothétiques par rapport à ce point de Lemoine, point commun à ces triangles. *(d'Ocagne.)*

ERRATUM

Page 240, ligne 5,
au lieu de OB = MB′ — MB
lisez OA = MB′ ± MB.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23082-10-92.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, voir page 241.)

Rayon du cercle α, *transformé de la droite* OG′. Ce cercle passant par g', la puissance de D, relativement à ce cercle, est $DA.Dg'$ ou $3DA.DG$, ou $-\frac{3a^2}{4}$. On a donc

$$\overline{A\alpha}^2 - \overline{D\alpha}^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Et comme
$$D\alpha = \frac{a(2a^2 - b^2 - c^2)}{2(b^2 - c^2)},$$

$$\overline{A\alpha}^2 = \frac{a^2}{4(b^2 - c^2)^2}[3(b^2 - c^2)^2 + (2a^2 - b^2 - c^2)^2]$$
$$= \frac{a^2}{(b^2 - c^2)^2}(a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - a^2c^2 - a^2b^2)$$

ce qui peut s'écrire

$$A\alpha = \frac{bc}{b^2 - c^2}.\omega\omega'.$$

Remarque. — Si I est la projection de A sur OG′, on a $2AI = \frac{bc}{A\alpha}$, d'où la relation $b^2 - c^2 = 2AI.\omega\omega'$.

Procédant en sens inverse, on pourrait calculer directement AI et en conclure $A\alpha$. Les triangles AOG′, ADH_a ayant les angles en A égaux, on a, d'après le théorème sur les aires,

$$\frac{AI.OG'}{h.H_aD} = \frac{R.AG'}{h.m},$$

ou
$$AI.OG' = R.H_aD.\frac{AG'}{m} = \frac{Rbc(b^2 - c^2)}{a(a^2 + b^2 + c^2)};$$

puis
$$A\alpha = \frac{a(a^2 + b^2 + c^2)}{R(b^2 - c^2)}.OG'.$$

6° *Transformée du cercle de Brocard.*

Les points ω, ω' *sont situés sur le cercle tangent à* $\alpha A'$ *et* αg *en* A' *et* g'. *Ce cercle passe aussi par le point* A_1 *et par le point* p *où la perpendiculaire à* AD *en* g' *rencontre la hauteur* AH, *et il a son centre sur* A_1p. *Ce cercle est, de plus, le lieu du point d'où* $\omega'\omega$ *est vu sous un angle égal à* A.

Considérons en effet le cercle de Brocard, c'est-à-dire le cercle décrit sur OG' comme diamètre et que nous appellerons le cercle E, en désignant par E son centre, milieu de OG. Le cercle de l'énoncé, que nous appellerons le cercle E_1, est le transformé du cercle E. Celui-ci, en effet, passant par O et G' et étant orthogonal à la droite OG', son transformé passe par A' et g', et est orthogonal au cercle α et par conséquent tangent aux deux rayons $\alpha A'$ et $\alpha g'$ du cercle α. On sait que Ω, Ω' sont sur le cercle E, donc ω, ω' sont sur le cercle E_1. Le cercle E passe par le point ϖ projection de 0 sur la symédiane, donc le cercle E_1 passe par A_1 qui est le transformé de ϖ. La projection P de G', sur AO, est aussi un point du cercle E, et comme le point P a évidemment pour transformé le point p où la perpendiculaire à Ag' ou g' rencontre AH, le cercle E_1 passe aussi par p. Du reste, dans le quadrilatère $A'pg'A_1$ les angles en A' et g' sont droits, donc pA_1 est un diamètre du cercle circonscrit E_1. Remarquons aussi que, comme $DA_1 = DA'$, le centre E_1 est sur la perpendiculaire D à BC.

Enfin on a $$(A_1B, A_1C) = -A,$$
ou $$(A_1\omega, A_1\omega') = -A;$$
d'où $$(A_1\omega', A_1\omega) = A;$$
donc $\omega'\omega$ est vue, sous un angle égal à A, de tout point de circonférence E_1.

Corollaire. — Cette dernière propriété se transforme ainsi : *si* M *est un point quelconque du cercle de Brocard, les tangentes en* M, *aux circonférences* $AM\Omega', AM\Omega$, *font entre elles un angle égal à* A.

Remarque. — Cette même propriété du cercle E_1 donne, pour le rayon u de ce cercle, $\frac{u}{\omega\omega'} = \frac{2R}{a}$. Et si l'on observe

que, dans le cercle α, le demi-angle au centre $A'\alpha E_1$ est égal à l'angle inscrit $A'Ag'$ ou H_aAD, on conclut que les triangles rectangles $E_1A'\alpha$, DH_aA sont semblables, et que

$$\frac{A'\alpha}{A'E} = \frac{h}{H_aD}, \quad \text{ou} \frac{A\alpha}{u} = \frac{2S}{b^2 - c^2}.$$

On retrouve aussi la relation établie 5°:

$$A\alpha = \frac{bc}{b^2 - c^2} \cdot \omega\omega'.$$

7° *Si* f, f', f'' *sont les points définis* § *XXVI, 10°, les circonférences* ACf, ABf' *et la droite* Af'' *passent par* ω; *et les circonférences* ABf, ACf'' *et la droite* Af' *passent par* ω'.

On sait en effet que FB, F'C, F''A concourent en Ω et que FC, F''B, F'A concourent en Ω'. (F, F', F'' ont aussi même signification que § XXVI, 10°).

8° *Démontrer, par la méthode d'inversion, que si par* A, B, C *on trace trois droites* L, L', L'' *faisant des angles égaux respectivement avec* AB, BC, CA *et qui se coupent* L' *et* L'' *en* D, L'' *et* L *en* E, L *et* L' *en* F, *les circonférences* BCD, ACE, ABF *passent par le premier point de Brocard* Ω. *Construction analogue pour l'autre.*

Si simple que soit la démonstration directe, l'application de la méthode d'inversion nous paraît présenter ici un intérêt particulier, à cause de l'emploi qu'on y fait des formules relative aux angles, et d'une difficulté que nous signalerons à la fin.

Soit $(AB, L) = (BC, L') = (CA, L'') = \varphi$.

Considérons d'abord E, intersection de L et L''. La droite L a pour transformée une droite l tracée par A et telle que $(AC, l) = -\varphi$. La droite L'' a pour transformée une circonférence l'' passant par A et B et tangente à une droite $B\lambda''$ définie par $(AB, B\lambda'') = \varphi$, c'est-à-dire une circonférence de chacun des points de laquelle AB est vu sous un angle égal à φ; de sorte que pour e, intersection de l et l'', et transformé de E on a

$$(eA, eB) = \varphi, \quad \text{ou} \quad (l, eB) = \varphi.$$

Comme $(AC, l) = -\varphi$; il en résulte

$$(AC, eB) = 0;$$

donc eB est parallèle à AC et passe en ω. Donc la circonférence AEB, transformée de eB, passe en Ω.

Considérons maintenant le point F, intersection de L et L'. La droite L', qui coupe BC sous l'angle φ, a pour transformée une circonférence l' qui coupe la circonférence ABC sous l'angle φ, c'est-à-dire une circonférence tangente à une droite $C\lambda'$ définie par

$$(CT, C\lambda') = \varphi, \qquad \text{ou} \qquad (CT, CA) + (CA, C\lambda') = \varphi.$$

Mais $(CT, CA) = B$, d'où $(CA, C\lambda') = -B + \varphi$.

La circonférence l' est donc telle que, de chacun de ses points, on voit AC sous l'angle $-B + \varphi$. De sorte que, pour le point f, intersection de l' et l, et transformé de F, on a

$$(fA, fC) = -B + \varphi \quad \text{ou} \quad (l, fC) = -B + \varphi,$$

et comme $(AC, l) = \varphi$, il en résulte

$$(AC, fC) = -B;$$

donc fC se confond avec CT et passe en ω. Donc la circonférence AFE passe en Ω.

Enfin prenons le point D intersection de L' et L''. Son transformé d est l'intersection des circonférences l', l''; et l'on a, par conséquent,

$$(dA, dB) = \varphi, \qquad (dA, dC) = -B + \varphi;$$

d'où, par différence,

$$(dB, dC) = -B.$$

Et comme $(\omega B, \omega C) = -B$, le point ω est sur la circonférence dBC. Donc Ω est sur la circonférence DBC.

Remarque. — Les droites AB, L ayant pour transformées leurs antiparallèles, relativement à A, AC, l, il est clair que $(AB, L) = \varphi$ se transforme en $(AC, l) = -\varphi$, ce qui semble en contradiction avec le principe de la conservation des angles en grandeur et en signe. La contradiction disparaît si l'on observe que le point A, où AB et L se coupent sous l'angle φ, n'a pas pour transformé le point A où AC et l se coupent sous l'angle $-\varphi$.

En général, les transformées l, l' de deux droites qui se coupent en M, sous un angle φ, sont deux circonférences qui se coupent sous l'angle φ, au point m transformé de M, et sous l'angle $-\varphi$, en A.

Quand M est en A, M est à l'infini, et les circonférences, devenues des droites, ne se coupent plus qu'en A, sous l'angle $-\varphi$.

Considérées comme deux circonférences, de rayons infinis, deux droites quelconques qui se coupent sous un angle φ doivent être regardées comme ayant à l'infini un second point commun où elles se coupent sous l'angle $-\varphi$.

Corollaire. — *Le point de Brocard*, Ω', *est situé sur la circonférence* dBC. Car ω et Ω' sont isocycliques.

Généralisation. — **Théorème**. 1° *Si, par* A, B, C *on trace trois droites* L, L′, L″ *qui se coupent en* D, E, F, *les circonférences* DBC, ECA, FAB *se rencontrent en un même point* M; *et si* D′, E′, F′ *sont les isogonaux de* D, E, F, *les circonférences* D′BC, E′CA, F′AB *se rencontrent en un même point* M′ *isogonal de* M

2° *Si, par* B, *on trace deux droites* X, X′, *et par* C *deux droites* Y, Y′, *définies par*

$$(AB, X) = (MA, MC), \qquad (AB, X') = (M'A, M'C),$$
$$(AC, Y) = (MA, MB), \qquad (AC, Y') = (M'A, M'B),$$

les droites X, Y *et la circonférence* M′BC *se coupent en un même point* m, *transformé de* M, *les droites* X′, Y′ *et la circonférence* MBC *se coupent en un point* m′, *transformé de* M′.

3° *Les coordonnées angulaires de* M, *relativement au triangle* DEF, *égalent celles de* M′, *relativement à* ABC, *et les coordonnées celles de* M′, *relativement à* D′E′F′, *égalent celles de* M, *relativement à* ABC.

4° *Le podaire de* M, *relativement à* DEF, *est directement semblable à* ABC, *et* M, *est le point autohomologue de deux triangles semblables; le podaire de* M′ *relativement à* D′E′F′ *est directement semblable à* ABC *et* M′ *est le point autohomologue.*

1° Désignons par D, E, F, D′, E′, F′, les angles des triangles DEF, D′E′F′. Si M est la rencontre des deux circonférences DBC, ECA, on a :

$$(MB, MC) = (DB, DC) = (DF, DE) = -D$$
$$(MC, MA) = (EC, EA) = (ED, EF) = -E$$

d'où, par addition,

$$(MB, MA) = F = (FB, FA).$$

Donc M est sur la circonférence FAB.

L'explication met en évidence que les coordonnées angulaires λ, μ, ν de M sont à $-D, -E, -F$.

Maintenant le triangle D'E'F' est aussi circonscrit à ABC; par exemple E'F' passe par A. Car AE', AF' étant respectivement antiparallèles relativement à l'angle A à AE, AF qui sont en ligne droite, sont aussi en ligne droite. Alors la même explication s'applique et les trois circonférences D'BC, E'CA, F'AB se coupent en un même point M' dont les coordonnées angulaires λ' μ', ν' sont égales à $-D'$, $-E'$, $-F'$. Mais comme $\lambda = (DB, DC)$ et $\lambda' = (D'B, D'C)$ et que D et D' étant isogonaux on a $(DB, DC) + (D'B, D'C) = A$; d'où il suit $A + \lambda' = A$. On prouve de même que $\mu + \mu' = B$, $\nu + \nu' = C$. Donc M et M' sont isogonaux.

2° La droite X, menée par B, et définie par $(AB, X) = (MA, MC)$, a pour transformée une circonférence qui passe en A et C et dont la tangente $C\lambda$ en C fait l'angle $(CA, C\lambda) = (MA, MC)$, c'est-à-dire une circonférence de chacun des points de laquelle AC est vu sous l'angle (MA, MC), c'est-à-dire la circonférence MAC ou EAC. De même, Y a pour transformée la circonférence FAB. D'ailleurs on sait (§ XXI) que la circonférence M'BC a pour transformée la circonférence MBC ou DBC. Donc X, Y et la circonférence M'BC se coupent en un même point *m*, transformée de M, où se coupent les circonférences EAC, FAB, DBC.

On raisonne de même pour X', Y' et la circonférence MBC.

Remarque. — Les points où X, Y rencontrent la droite E'AF' transformée de EAF ou L, sont les transformées *e*, *f* des points E, F; et les circonférences AB*e*, AC*f* se rencontrent en un point *d*, transformé de D. De même X' Y' rencontrent EF aux points *e'*, *f'* transformés de E', F'; et les circonférences AC*e'*, AB*f'* se coupent en un point *d'* transformé de D' et isogonal de *d*.

3° On a $(ME, MF) = (ME, MA) + (MA, MF)$.

Et comme AMCE, AMBF sont inscriptibles:

$$(ME, MA = (CE, CA), (MA, MF) = (BA, BF).$$

Donc

$$(ME, MF) = (BA, CA) - (BF, CE) = A - (DB, DC) = A - \lambda$$

ou $(ME, MF) = \lambda'$;

De même : $(MF, MD) = \mu'$, $(MD, ME) = \nu'$.

De même aussi :

$$(M'E', M'F') = \lambda, \quad (M'F', M'D') = \mu, \quad (M'D', M'E') = \nu.$$

4° Les angles du podaire de M, relativement à DEF, sont

$$(ME, MF) - D, \ (MF, MD) - E, \ (MD, ME) - F,$$

ou $\lambda' + \lambda$, $\mu' + \mu$, $\nu' + \nu$,

c'est-à-dire A, B, C.

Donc ce podaire est directement semblable à ABC. D'ailleurs, de M on voit les côtés de ce podaire sous les angles $-D$, $-E$, $-F$ ou λ, μ, ν, c'est-à-dire sous les mêmes angles que les côtés de ABC. Donc M est le point autohomologue des deux triangles semblables.

On raisonne de même pour le podaire de M′, relativement à D′E′F′.

Remarque. — D'après le théorème général du § XII, le podaire de *m*, relativement à *def*, est semblable au podaire de M, relativement à DEF; donc il est aussi directement semblable à ABC; et la podaire de *m′*, relativement à *d′e′f′*, est de même semblable à ABC.

Autres remarques sur le théorème. — 1° Le triangle DEF, qui n'est assujetti qu'à être circonscrit à ABC, peut être semblable à un triangle donné quelconque, d'où de nombreuses applications particulières du théorème. Le cas où M est le premier point de Brocard de ABC est celui où DEF est semblable à CAB. Alors M est aussi le premier point de Brocard de DEF, car, d'après 3°, ses coordonnées angulaires, relativement à DEF, sont $-B$, $-C$, $-A$ ou $-F$, $-D$, $-E$. En même temps M′ est le second point de Brocard des deux triangles ABC, D′E′F′.

2° On pourrait définir DEF, D′E′F′ comme formés, le premier, par trois droites L, L′ L″ issues de A, B, C et faisant respectivement avec AB, BC, CA les angles φ, φ' φ''; et le second, par trois droites L_1, L'_1, L''_1, issues aussi de A, B, C et faisant respectivement avec AC, BA, CB les angles $-\varphi$, $-\varphi'$, $-\varphi''$.

$(AB, L) = \varphi = (L_1, AC)$, $(BC, L') = \varphi' = (L'_1\ BA)$, $(CA, L'') = \varphi'' = (L''_1, CB)$.

Les angles D, E, F, D′, E′, F′ peuvent alors s'évaluer en fonction de $\varphi, \varphi', \varphi''$ et A, B, C. On obtient sans peine :

$$D = C + \varphi' - \varphi'', \qquad D' = B + \varphi'' - \varphi',$$
$$E = A + \varphi'' - \varphi, \qquad E' = E + \varphi - \varphi'',$$
$$F = B + \varphi - \varphi', \qquad F' = A + \varphi' - \varphi.$$

(A suivre.)

EXERCICES

Par M. **Boutin.**

(Suite, voir page 230).

XIV. — *Les points* M_2, M'_2 *dont les coordonnées normales sont*

$$(M_2) \qquad \frac{x}{\sin(A+\lambda)} = \frac{y}{\sin(B+\lambda)} = \frac{z}{\sin(C+\lambda)},$$

$$(M'_2) \qquad \frac{x}{\sin(A-\lambda)} = \frac{y}{\sin(B-\lambda)} = \frac{z}{\sin(C-\lambda)},$$

sont conjugués harmoniques par rapport à OK.

Les inverses M, M′, des points précédents sont situés sur l'hyperbole de Kiepert et correspondent au même angle de Kiepert. M_2, M'_2 sont évidemment sur OK, et il suffit de constater que la polaire de M'_2 par rapport au cercle de Brocard passe par M_2; ce qui revient à vérifier l'identité :

$$\Sigma \sin(A+\lambda)[2 \sin\theta \sin(A-\lambda) - \sin(B-\lambda) - \sin(C-\theta) - \sin(C-\lambda)\sin(B-\theta)] \equiv 0$$

On peut faire application de ce théorème général : 1° aux centres isodynamiques (voir *J. M. E.*, année 1889, p. 244); 2° aux points désignés plus haut par L_2, L'_2.

XV. — *Calcul des distances* OM_2, KM_2, M_2M_2 ; M_2, M'_2 *désignant les mêmes points qu'au paragraphe précédent.*

D'après une formule générale, on a

$$R^2 - \overline{OM}_2^2 = \frac{\Sigma a^2 \sin B \sin C \sin(B+\lambda)\sin(C+\lambda)}{[\Sigma \sin A \sin(A+\lambda)]^2}.$$

$$R^2 - \overline{OM}_2^2 = \frac{4R^2 \sin A \sin B \sin C \Sigma \sin A \sin (B+\lambda) \sin(C+\lambda)}{[\Sigma \sin A \sin (A+\lambda)]^2}.$$

On trouve :

$$\Sigma \sin A \sin (A+\lambda) = 2 \sin A \sin B \sin C \sin \lambda (\cot\lambda \cot\theta + 1),$$

$$\Sigma \sin A \sin (B+\lambda) \sin (C+\lambda)$$

$$= \sin^2 \lambda \sin A \sin B \sin C \,(3 \cot^2 \lambda + 2 \cot \lambda \cot \theta + 1),$$

d'où

$$(1) \qquad OM_2 = \frac{R \cot\lambda \sqrt{\cot^2\theta - 3}}{\cot\lambda \cot\theta + 1},$$

$$(2) \qquad KM_2 = \frac{R\sqrt{\cot^2\theta - 3}}{\cot\theta (\cot\lambda \cot\theta + 1)},$$

$$M_2M_2' = \frac{2R \cot\lambda \sqrt{\cot^2\theta - 3}}{\cot^2\lambda \cot^2\theta - 1}.$$

On peut faire application de ces formules aux centres isodynamiques V, W, on trouve les résultats déjà signalés. Pour les points L_2, L_2' on trouve :

$$OL_2 = \frac{R\sqrt{3}\sqrt{\cot^2\theta - 3}}{\sqrt{3}\cot\theta + 1}, \qquad OL_2' = \frac{R\sqrt{3}\sqrt{\cot^2\theta - 3}}{\sqrt{3}\cot\theta - 1}.$$

$$KL_2 = \frac{R\sqrt{\cot^2\theta - 3}}{\cot\theta(\sqrt{3}\cot\theta + 1)}, \quad KL_2' = \frac{R\sqrt{\cot^2\theta - 3}}{\cot\theta(\sqrt{3}\cot\theta - 1}, $$

$$L_2L_2' = \frac{2R\sqrt{3}\sqrt{\cot^2\theta - 3}}{3\cot^2\theta - 1}.$$

Des formules générales (1), (2) on déduit le rapport remarquable :

$$\frac{KM_2}{OM_2} = - \frac{KM_2'}{OM_2'} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cot}$$

qui permet de construire très simplement les points de OK qui correspondent à un angle de Kiepert λ donné.

XVI. — Les droites AV, BV, CV, AW, BW, CW rencontrent la circonférence circonscrite aux points A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, tels que les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sont équilatéraux (théorème de M. J. Neuberg). Nous proposons de démontrer que :

Les droites de Simson des points : 1° A_1, B_1, C_1; 2° A_2, B_2, C_2 *forment un triangle équilatère homothétique au premier et au deuxième triangle équilatéral podaire.*

Ceci résulte de considérations géométriques très simples.

*XVII. — M, M′ *étant deux points de l'hyperbole de Kiepert dont les coordonnées normales sont :*

$$x \sin(A \pm \lambda) = y \sin(B \pm \lambda) = z \sin(C \pm \lambda)$$

la droite MM′ *passe par le point de Lemoine* K.

On a à vérifier

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin(A+\lambda)} & \dfrac{1}{\sin(A-\lambda)} & \sin A \\ \dfrac{1}{\sin(B+\lambda)} & \dfrac{1}{\sin(B-\lambda)} & \sin B \\ \dfrac{1}{\sin(C+\lambda)} & \dfrac{1}{\sin(C-\lambda)} & \sin C \end{vmatrix} = 0.$$

ou

$$\begin{vmatrix} \cos(B-C)-\cos(A-2\lambda) & \cos(B-C)-\cos(A+2\lambda) & \sin A \\ \cos(B-A)-\cos(B-2\lambda) & \cos(B-A)-\cos(B+2\lambda) & \sin B \\ \cos(A-B)-\cos(C-2\lambda) & \cos(A-B)-\cos(C+2\lambda) & \sin C \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} \cos(B-C)-\cos(A\pm 2\lambda) & \sin A \sin 2\lambda & \sin A \\ \cos(C-A)-\cos(B\pm 2\lambda) & \sin B \sin 2\lambda & \sin B \\ \cos(A-B)-\cos(C\pm 2\lambda) & \sin C \sin 2\lambda & \sin C \end{vmatrix} = 0.$$

C. Q. F. D.

On peut en faire immédiatement l'application à V_2, W_2, à L, L′, etc.

XVIII. — Il résulte de la démonstration précédente que les mêmes points M, M′ sont en ligne droite avec O_9 et respectivement les points :

$$\frac{x}{\cos(A-2\lambda)} = \frac{y}{\cos(B-2\lambda)} = \frac{z}{\cos(C-2\lambda)},$$

$$\frac{x}{\cos(A+2\lambda)} = \frac{y}{\cos(B+2\lambda)} = \frac{z}{\cos(C+2\lambda)}.$$

XIX. — M_2, M'_2 *étant les inverses des points considérés au numéro XVII, les droites* M_2M', MM'_2 *se coupent en* G.

(*) Quelques-uns de ces théorèmes ne sont pas nouveaux. Voir la note et les très élégantes démonstrations de M. M'Cay, sur l'hyperbole de Kiepert (*Mathésis*, 1888).

Ceci résulte des identités

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin(A+\lambda)} & \sin(A-\lambda) & \dfrac{1}{\sin A} \\ \dfrac{1}{\sin(B+\lambda)} & \sin(B-\lambda) & \dfrac{1}{\sin B} \\ \dfrac{1}{\sin(C+\lambda)} & \sin(C-\lambda) & \dfrac{1}{\sin C} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin(A-\lambda)} & \sin(A+\lambda) & \dfrac{1}{\sin A} \\ \dfrac{1}{\sin(B-\lambda)} & \sin(B+\lambda) & \dfrac{1}{\sin B} \\ \dfrac{1}{\sin(C-\lambda)} & \sin(C+\lambda) & \dfrac{1}{\sin C} \end{vmatrix} = 0.$$

XX. — *La polaire de* K *par rapport à l'hyperbole de Kiepert est la droite d'Euler.*

L'équation de cette polaire est, en coordonnées barycentriques :

$$\alpha[(a^2-b^2)b^2+(c^2-a^2)c^2]+\beta[(a^2-b^2)a^2+(b^2-c^2)c^2]$$
$$+\gamma[(b^2-c^2)b^2+(c^2-a^2)a^2]=0.$$

On constate aisément que cette droite passe par les points

(G) $\alpha=\beta=\gamma,$

(H) $\alpha \cot A = \beta \cot B = \gamma \cot C,$

ou $\alpha(b^2+c^2-a^2)=\beta(a^2+c^2-b^2)=\gamma(a^2+b^2-c^2).$

XXI. — *La ligne* V_2W_2 *des isogones passe par le milieu* F *de* GH, *et* V_2, W_2, *partagent harmoniquement la distance* KF.

En effet, HG étant la polaire de K par rapport à l'hyperbole de Kiepert, et la droite V_2KW_2 contenant le centre Q de cette courbe, V_2W_1 est le diamètre conjugué de la courbe HG et F le conjugué de K sur ce diamètre.

XXII. — *Si* $\lambda+\lambda'=90°$, *les points de l'hyperbole de Kiepert correspondant aux angles de Kiepert* λ, λ', *sont en ligne droite avec* O.

Il suffit de vérifier l'identité

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin(A \pm \lambda)} & \dfrac{1}{\sin(A \pm \lambda')} & \cos A \\ \dfrac{1}{\sin(B \pm \lambda)} & \dfrac{1}{\sin(B \pm \lambda')} & \cos B \\ \dfrac{1}{\sin(C \pm \lambda)} & \dfrac{1}{\sin(C \pm \lambda')} & \cos C \end{vmatrix} = 0,$$

en prenant les signes parallèlement et en tenant compte de la relation indiquée par l'énoncé.

Comme application, les points V_2, O, L sont en ligne droite, les points W_2, O, L′ le sont également.

XXIII. — *Les tangentes à l'hyperbole de Kiepert, en deux points* M, M′, *correspondant à des angles de Kiepert égaux et de signes contraires, se coupent en un point de la droite d'Euler; ce point est conjugué harmonique par rapport à* GH, *de celui où* MM′ *coupe la même droite.*

Ceci résulte de ce que les points M, M′, K étant en ligne droite, les tangentes en M, M′ se coupent sur GH, polaire de K par rapport à l'hyperbole de Kiepert.

XXIV. — *Soit* M *un point quelconque*, A_1, B_1, C_1 *ses projections orthogonales*, x, y, z *ses coordonnées normales; si trois mobiles partent simultanément de* A_1, B_1, C_1 *et parcourent les côtés du triangle de référence dans un même sens, avec des vitesses respectivement proportionnelles à* x, y, z, *le triangle de ces trois points reste constamment semblable à lui-même, et à* $A_1B_1C_1$.

Soient A_2, B_2, C_2 les positions du mobile, au bout du temps t.

On constate aisément que

$$\overline{A_2C_2}^2 = \overline{A_1C_1}^2 (1 + t^2),$$

les termes du premier degré en t s'annulant, ce qui démontre le théorème.

XXV. — *De tous les triangles semblables inscrits dans un triangle donné, celui qui est minimum est podaire.*

Ceci résulte de la formule précédente.

Des deux théorèmes précédents, qui sont généraux, on peut en particulier, tirer les deux énoncés suivants :

XXVI. — *Tous les triangles équilatéraux dont les sommets sont sur les côtés de* ABC, *appartiennent à deux séries qui ont pour point de départ chacun des triangles équilatéraux podaires, et peuvent s'obtenir en portant dans un même sens à partir des sommets de ces triangles, sur les côtés de* ABC, *des longueurs proportionnelles respectivement aux distances aux côtés de l'un ou de l'autre des centres isodynamiques.*

XXVII. — *Il existe des triangles équilatéraux d'aire minima, inscrits dans un triangle donné, ce sont les triangles podaires des centres isodynamiques.*

XXVIII. — *Si* $A_3B_3C_3$ *est un triangle inscrit dans* ABC *et tel que* (voir XXIV) $A_1A_3 = A_1A_2$, $B_1B_3 = B_1B_2$, $C_1C_3 = C_1C_3$; *les triangles* $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ *sont égaux.*

Cela résulte de ce que A_2C_2 est indépendant du signe de t.

XXIX. — *Le centre de gravité de* $A_2B_2C_2$ *décrit une ligne droite.*

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème général sur les centres de gravité.

Ici, la droite parcourue est parallèle à la transversale inverse de la droite harmoniquement associée au point dont le triangle minimum est le triangle podaire.

XXX. — *Le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans le triangle de référence est une ligne droite passant par* P_1 *(ou* P_2*) et parallèle à la droite harmoniquement associé au premier (ou au second) centre isogone.*

C'est l'application de la proposition précédente.

On peut remarquer que les droites harmoniquement associées à V_2 et W_2 sont parallèles entre elles, et perpendiculaires à la droite d'Euler. True for any point on the hyperbola

En général, les droites harmoniquement associées à deux points de l'hyperbole de Kiepert ~~dont les angles de Kiepert sont égaux et de signes contraires~~, sont parallèles. *

XXXI. — *Soit* $A_1B_1C_1$ *le triangle podaire d'un point quelconque* M. *Sur* BC, CA, AB *on décrit des segments capables des*

angles A_1, B_1, C_1, *soit* O_a, O_b, O_c *les centres de ces segments; les triangles* $A_1B_1C_1$, $O_aO_bO_c$ *sont homothétiques.*

En effet, soit x, y, z, les coordonnées normales de M, S_1 l'aire $A_1B_1C_1$, on trouve aisément :

$$\frac{OO_a}{x} = \frac{OO_b}{y} = \frac{OO_c}{z} = \frac{2S_1}{S}.$$

XXXII. — *Le triangle maximum semblable à* $A_1B_1C_1$ *circonscrit à* ABC, *est homothétique à* $A_1B_1C_1$.

En effet, il s'obtient en menant par A, B, C, des parallèles à O_bO_c, O_aO_c, O_bO_a.

On peut remarquer que les perpendiculaires en A, B, C, aux côtés de ce triangle maximum concourent en M_2, inverse de M.

L'application aux triangles équilatéraux d'aire maxima circonscrits, est immédiate.

BIBLIOGRAPHIE

Traité d'Arithmétique, destiné aux élèves de l'enseignement secondaire classique et moderne, de l'enseignement primaire supérieur des écoles normales d'instituteurs et enfin aux maîtres de l'enseignement primaire, aux comptables et aux employés de commerce, par M. Jourdanet, ancien professeur de Mathématiques, inspecteur d'Académie, honoraire; prix 6 francs. Paris, Librairie Hermann et Librairie Croville-Morant, ou chez l'auteur, à Tarbes, 76, rue Brauhauban.

Les sous-titres qui se trouvent sur l'ouvrage que nous avons le plaisir de présenter aujourd'hui aux lecteurs du journal, nous avaient d'abord causé une certaine inquiétude. Les diverses catégories de personnes auxquelles l'auteur adresse son livre nous paraissaient avoir des exigences bien difficiles à concilier : l'enseignement secondaire, les écoles normales d'instituteurs passent pour réclamer des connaissances théoriques dont les maîtres de l'enseignement primaire, les comptables et employés de commerce peuvent fort bien se passer; tandis que ceux-ci demandent des notions pratiques dont les premiers se soucient fort peu. Eh bien ! après avoir lu l'ouvrage de M. Jourdanet, nous sommes convaincu une fois de plus, que les deux parties de la science qu'il a abordées se tiennent intimement, que les élèves de l'enseignement secondaire et surtout des écoles normales primaires auront beaucoup à apprendre dans la seconde partie de son livre, et que les autres lecteurs tireront grand profit des notions théoriques qui se trouvent au début de l'ouvrage.

Cela dit, indiquons en quelques mots les qualités du Traité d'Arithmetique signalé ici : une grande simplicité dans les raisonnements, simplicité qui n'exclut pas la rigueur, et un grand choix d'exercices dont quelques-uns sont résolus, présentant un intérêt théorique ou pratique, et complétant sur plusieurs points les explications de la théorie ; ces

qualités pourraient suffire pour appeler l'attention sur le travail de M. Jourdanet.

Parmi les questions que l'on trouve rarement traitées dans les ouvrages d'Arithmétique, et qui surtout ne se trouvent presque jamais réunies dans un même traité, nous signalerons :

La recherche du plus petit multiple commun de plusieurs fractions;

Les propriétés du quotient d'un nombre quelconque par un nombre quelconque;

Quelques propriétés des périodes dans les fractions périodiques;

Les principes du calcul des nombres incommensurables.

Les approximations, opérations abrégées et erreurs relatives;

Les progressions et les logarithmes.

Voilà les principaux points intéressants de la partie théorique; dans la partie plus exclusivement pratique, nous indiquerons : les passages de l'ancien système des poids et mesures au système légal, avec de nombreux exercices à l'appui; si l'auteur croit utile de ne pas nous laisser absolument ignorants sur la question de la négociation des valeurs mobilières, il ne traite que les opérations au comptant et les opérations à terme ferme ou à primes; mais il insiste beaucoup sur une question d'une application constante, le change de place à place avec les diverses combinaisons qu'elle présente.

Nous serions heureux de pouvoir, en appelant l'attention de nos lecteurs sur l'ouvrage de M. Jourdanet, contribuer au succès d'un livre qui sera utilement consulté par les professeurs et qui sera, pour les élèves, un guide précieux.

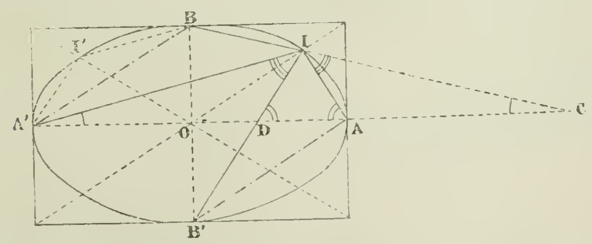
A. MOREL.

QUESTION 419

Solution par M. E. FOUCARD, élève au Lycée Michelet.

On considère le rectangle circonscrit aux quatre sommets A, A′, B, B′ *d'une ellipse ; soit* I *le point de rencontre d'une des diagonales de ce rectangle avec l'ellipse. Montrer que les angles* $\widehat{AIA'}$, $\widehat{BIB'}$ *sont supplémentaires.*

En considérant l'ellipse comme la projection du cercle, on



voit que si I′ désigne le symétrique de I, par rapport à BB′, les droites A′I, BI′ sont parallèles. Par suite, BI, IA, forment

avec AA' un triangle isoscèle A'IC. On voit de même que A'I' B'I' sont parallèles; DIA est isocèle.

On a donc $\widehat{A'ID} = \widehat{AIC}$

et, comme $AIA' + BIA' + AIC = \pi$,

ou a $AIA' + BIA' + A'IB' = \pi$,

ou, enfin $AIA' + BIB' = \pi$.

Nota. — Autres solutions par MM. B. SOLLERTINSKY; GROLLEAU, répétiteur au lycée de Marseille; SVÉCHNICOFF.

QUESTION 422

Solution par M. B. SOLLERTINSKY.

Une circonférence quelconque passant par le point de Lemoine K *d'un triangle* ABC, *détermine sur les segments de droites* KA, KB, KC, *des points* A', B', C' *tels que*

$$am_a\, KA' + bm_b\, KB' + cm_c\, KC' = 0$$

(a, b, c, *désignant les côtés du triangle;* m_a, m_b, m_c *les médianes).* *(Louis Bénézech).*

Soit K un point quelconque du plan du triangle ABC; K' son inverse (isogonal; $x, y, z, x' y' z'$ les distances de ces points aux côtés du triangle.

On a $KB.KC \sin BKC = ax$,

d'où $KA.KB.KC \sin BKC = ax.KA$.

Mais $KA : K'A = y : z'$,

Donc $$KA.KB.KC \sin BKC = \frac{xyz}{zz'}\, aK'A,$$

et, par suite

$$\sin BKC : \sin CKA : \sin AKB = aK'A : bK'C : cK'C.$$

Si une circonférence passant par K rencontre KA, KB, KC en A', B', C', on a ainsi

$$B'C' : C'A' : A'B' = a.K'A : b.K'B : c.K'C.$$

et, d'après le théorème de Ptolémée, *pour tout point à l'intérieur du triangle* ABC,

$$aK'A.KA' + bK'B.KB' + cK'C.KC' = 0.$$

Enfin, K étant le point de Lemoine, on a

$$K'A : K'B : K'C = m_a : m_b : m_c.$$

Nota. — Voici la solution que l'auteur de la question proposait.

Rappelons ce théorème (Voir : *Note de Géométrie et de Mécanique*) :

Une circonférence quelconque passant par le point P dont les coordonnées barycentriques, par rapport au triangle de référence ABC, sont α, β, γ, détermine sur les segments de droites PA, PB, PC des points A′, B′, C′ tels que

$$\alpha PA.PA' + \beta PB.B' + \gamma PC.PC' = 0.$$

Par conséquent, si l'on suppose que le point P coïncide avec le point de Lemoine K, à cause des relations connues.

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{c}{c^2},$$

$$\frac{a\text{KA}}{ma} = \frac{b\text{KB}}{mb} = \frac{c\text{KC}}{mc},$$

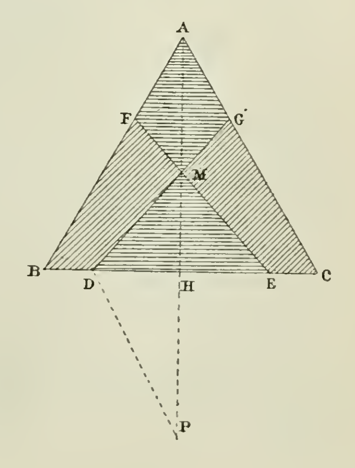
on a bien $am_a\text{KA}' + bm_b\text{KB}' + cm_c\text{KC}' = 0.$

QUESTION 425

Solution par M. Ernest **Foucart**, élève au Lycée Michelet.

Dans un triangle isoscèle, le rapport de la base à la hauteur est $\frac{9}{8}$. *On prend, sur la hauteur* AH, *un point* M *qui la divise, à partir de la base, dans le rapport de* 3 *à* 5; *et, par ce point, on mène les deux droites qui font, avec la hauteur, des angles de* 45°. *Démontrer que ces deux droites partagent le triangle en parties équivalentes.* (Lucien Lévy.)

Soient le triangle ABC; AH la hauteur; M qui la divise, à partir du pied H, dans le rapport de 3 à 5. Traçons les droites DM, EM, à 45° sur AH. Elles rencontrent : l'une, BC en D, et AC en G; l'autre, BC, en E, et AB, en F. Le triangle MDE est isoscèle rectangle; son aire est $\overline{\text{MH}}^2$ ou $\frac{1}{9}\overline{\text{BC}}^2$. Or l'aire de ABD est $\frac{4}{9}\overline{\text{BC}}^2$. Donc MDE est le quart de ABC.



Au point D, menons DP parallèle à AC. Elle rencontre la hauteur en P. HDP est semblable

ACH; Donc $HP = \frac{16}{15} AM$.

Or $$MH = \frac{3}{5} AM.$$

Donc $$\frac{AM}{MP} = \frac{3}{5}.$$

Or $$\frac{GM}{MD} = \frac{AM}{MP},$$

par suite $$\frac{GM}{MD} = \frac{3}{5}.$$

Les triangles AGM, DHM, ayant un angle égal, donnent

$$\frac{\text{aire AGM}}{\text{aire DHM}} = \frac{MG \times MA}{MD \times MH} = \frac{MG}{MD} \cdot \frac{MA}{MH} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1.$$

Par suite, le quadrilatère AFGM est le quart de ABC.

De même, $MCGE = MFBD = \frac{ABC}{2} - \frac{ABC}{4} = \frac{ABC}{4}$.

Les quadrilatères AFGM, GMEC, FMBD, et le triangle MDE sont, par suite, équivalents; chacun d'eux représentant le quart de ABC.

Nota. — Autres solutions, par MM. Svechnicoff, à Troïtzk (Russie); Maurice Cazelles, élève au lycée de Poitiers, et H. Brocard.

QUESTION 426

Solution par M. Svéchnicoff, à Troïtzk (Russie).

Démontrer que l'équation

(A) $$x^2 = y^2 + z^4,$$

admet une infinité de solutions, en nombres entiers, la somme $x + y$ *étant un bicarré.* (G. L.)

Posons $$x + y = p^4.$$

Alors (A) devient

$$p^4(x - y) = z^4.$$

En posant $$\frac{z^4}{p^4} = q^4,$$

on a $$x - y = q^4.$$

Ainsi

$$x = \frac{1}{2}(p^4 + q^4), \qquad y = \frac{1}{2}(p^4 - q^4), \qquad z = pq$$

(p et q étant des nombres arbitraires pairs ou impairs en même temps) vérifient l'équation proposée.

Nota. — Mme Ve Prime nous a adressé une solution analogue. L'identité

$$(t^4 + 6t^2\theta^2 + \theta^4)^2 = (4t^3\theta + 4t\theta^3)^2 + (t^2 - \theta^2)^4$$

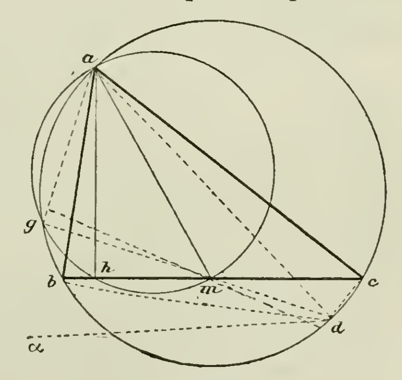
fournit une infinité de solutions, t, θ étant arbitraires, sans qu'il y ait lieu de savoir s'ils sont, ou non, de même parité.

QUESTION 427

Solution par A. Droz-Farny.

Sur la médiane am, *d'un triangle* abc, *comme diamètre on décrit une circonférence de cercle. Cette courbe coupe, au point* g, *la circonférence circonscrite au triangle* abc. *Démontrer que les droites* ab, ac, ag *et la hauteur* ah *du triangle forment un faisceau harmonique.* (Mannheim.)

Soit d, l'autre extrémité du diamètre passant par a du cercle circonscrit au triangle. dm coupera ce cercle, pour la seconde fois, en g. Par le point d menons une parallèle $d\infty$ au côté bc.



Le faisceau $d(bcm\infty)$ est harmonique, or ses rayons étant respectivement perpendiculaires sur ceux du faisceau $a(bcgh)$ ce dernier est aussi harmonique.

Nota. — Solutions diverses par Mme Ve Prime; M. Svéchnicoff, à Troïtzk (Russie); E. Foucart, élève au lycée Michelet; Grolleau, maître-répétiteur au lycée de Marseille; Sollertinsky, à Saint-Pétersbourg.

QUESTION 428

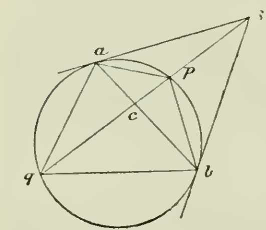
Solution par Mme Ve Prime.

On donne une circonférence de cercle et les tangentes sa. sb *à cette courbe. Du point* s, *on mène une droite arbitraire qui rencontre la circonférence en* p *et en* q*; démontrer que les distances des points de contact* a, b, *aux points* p, q, *sont proportionnelles; c'est-à-dire que*

$$\frac{ap}{aq} = \frac{bp}{bq}.$$

(Mannheim.)

Première solution. — Désignons par c le point où ab rencontre pq, ac, bc sont, comme on le voit, les symédianes des triangles paq, pbq ; on a donc immédiatement



$$ap : aq = bp : bq = \sqrt{pc} : \sqrt{qc}.$$

Deuxième solution. — On sait que

$$\overline{ap}^2 : \overline{aq}^2 = \overline{bp}^2 : \overline{bq}^2 = sp : sq, \quad (*)$$

d'où $ap : aq = bp : bq = \sqrt{sp} : \sqrt{sq}$.

Troisième solution. — Les triangles semblables sap, saq donnent

$$ap : aq = sa : sq;$$

de même $bp : bq = sb : sq$.

Or $sa = sb$,

on a donc encore $ap : aq = bp : bq$.

Nota. — Solutions diverses par MM. Ernest Foucart, élève au lycée Michelet; A. Boutin; Svéchnicoff, à Troïtzk; Maurice Cazelles, élève au lycée de Poitiers; A. Droz-Farny.

M. Droz-Farny ajoute, à sa solution, la remarque suivante :

Le quadrilatère $apbq$ est appelé *quadrilatère harmonique.* La propriété en question est d'ailleurs bien connue, comme on s'en assure en se reportant à la *Note sur le quadrilatère harmonique*, par Clément Thiry (*Journal*, 1887, p. 223).

(*) Voir (*Journal*, 1891) la note placée au bas de la page 281. C'est à cause de la propriété indiquée dans cette note, que M. Clément Thiry a proposé, il y a déjà quelques années, d'appeler les tangentes aux sommets d'un triangle inscrit les *symédianes extérieures* de ce triangle.

L'existence du point de Lemoine, dans ces quadrilatères, exige que les tangentes du cercle circonscrit, menées aux extrémités d'une diagonale, se coupent sur l'autre diagonale, etc.

QUESTION 429.

Solution par M B. Sottertinsky.

Sur deux anti-parallèles menées par A, *dans le triangle* ABC, *déterminer deux couples de points inverses* M, M'; N, N' *tels que les circonférences* AMM', ANN' *se coupent en un point donné* P *de la circonférence* ABC. *Condition de possibilité. Si* D, D' *sont les rencontres de* BC *avec ces anti-parallèles, le point* E, *où la circonférence* APD' *coupe* AD, *est conjugué harmonique de* A *relativement à* MN; *de même, le point* E, *où la circonférence* APD *coupe* AD', *est conjugué de* A *relativement à* M'N'. *Si* F, F' *sont les rencontres de la circonférence* ABC *avec* AD, AD', Q *étant le point de rencontre des circonférences* AMN', ANM', *on a* $\frac{QF}{QF'} = \frac{PF}{PE'}$; *ou* Q *est sur la symédiane de* PFF'.

(Bernès.)

En supposant que *le point* P *et la droite* BC *sont du même côté de la droite* FF', le point F sera extérieur au cercle APD', et le produit FE, FA sera positif.

Portons sur la droite FA

$$FM = FN = \sqrt{FE.FA},$$

et soient M', N' les isogonaux des points M, N.

Les points M', N' seront aussi équidistants de F', parce que les divisions M'N'F', NMF sont semblables (*J. E.* 1892, p. 21).

Le point E étant conjugué harmonique de A, par rapport à MN, on a

$$\frac{EM}{EN} = -\frac{AM}{AN}.$$

D'autre part,

$$\frac{D'M'}{D'N'} = (M'N'D'\infty) = (MNAF) = \frac{AM}{AN} : \frac{FM}{FN} = -\frac{AM}{AN}.$$

Donc $$\frac{EM}{EN} = \frac{D'M'}{D'N'}.$$

Ainsi, les divisions MEN, M'D'N' sont semblables, et les milieux F, F' des segments homologues MN, M'N' font aussi partie de ces divisions.

Les quatre circonférences AED', AFF', AMM', ANN' *concourent* au centre de similitude de ces divisions, c'est-à-dire au *point* P, point appartenant aux deux premières : AED' et AFF'.

Les triangles PMF, PM'F' étant semblables, on a

$$\frac{PF}{PF'} = \frac{MF}{M'F'}.$$

Le point Q étant le centre de similitude des divisions M'N'F', MNF, les triangles QMF, QN'F' sont semblables, d'où

$$\frac{QF}{QF'} = \frac{MF}{N'F'},$$

Par suite, $\frac{QF}{QF'} = \frac{PF}{PF'}$; ce qui démontre que PQ est la symédiane commune des triangles PFF', QFF'.

On verrait sans peine (en suivant la marche inverse) que la condition concernant le point P est non seulement suffisante, mais nécessaire.

QUESTION 430

Solution par M. B. Sollertinsky.

Soit un triangle ABC, K, K_a, K_b, K_c *le point de Lemoine et ses points algébriquement adjoints ;* A', B', C' *les milieux des trois côtés.*

Par C, A', B, *on mène des parallèles à la bissectrice de l'angle* BAC, *laquelle bissectrice coupe* BC *en* A_1.

La parallèle menée par C *coupe* BA *en* C_1,

B CA *en* B_1,

A' BA *en* γ, CA *en* β.

Cela posé : Soient M *le point où* βA_1 *coupe* BB_1,
N *le point où* γA_1, *coupe* CC_1.

Les quatre points A, M, N, K *sont en ligne droite.*

Si, dans cette construction, on remplace la bissectrice de l'angle BAC *par celle de son supplément, on aura des points* A_1', C_1', B_1', γ', β', M', N' ; *et* A, M', N', K *seront en ligne droite.*

Enfin, si l'on trace $\beta' A_1$ *qui coupe* BB_1' *en* M_1,
$\gamma' A_1$ CC_1' *en* N_1,
$\beta A_1'$ BB_1 *en* M_1',
$\gamma A_1'$ CC_1 *en* N_1,
A, M_1, N_1, K_b *seront en ligne droite, ainsi que* A, M_1', N_1', K.

Généraliser, en montrant que si AA_1, *au lieu d'être la bissectrice de* BAC, *est une droite passant par le point dont les coordonnées normales sont* x, y, z, *la droite* AMN *passera par le point* ax^2, by^2, cz^2.

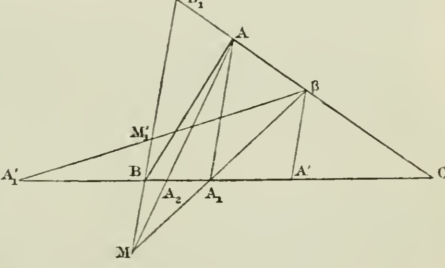
Soit A_2 l'intersection des droites AM, BC. Projetons la division $(B_1BM\infty)$ des points A, β, sur la droite BC.

On aura $$(CBA_2A_1) = (CBA_1A')$$
ou

$$(1) \qquad \frac{CA_2}{A_2B} : \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA_1}{A_1B} : \frac{CA'}{A'B}.$$

Mais, en désignant par α, β, γ, les coordonnées barycentriques du point P, par lequel passe la droite AA_1 ; on a

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{\beta}{\gamma}.$$



Donc (1)

$$\frac{CA_2}{A_2B} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2.$$

Ainsi, la droite AM passe par le point P' ayant pour coordonnées barycentriques $\alpha^2 : \beta^2 : \gamma^2$, ou, pour coordonnées normales, $ax^2 : by^2 : cz^2$. De même, en projetant, de A, β', la division $(B_1'BM'\infty)$ on aurait

$$\frac{CA_2'}{A_2'B} = \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{CA_2}{A_2B}.$$

Donc, les droites AM, AM' coïncident.

On démontrerait, de la même manière, que les droites AN, AN passent par P′ et, par suite, coïncident avec la droite AMM′.

La division ($BCA_1A'_1$) étant harmonique, sa projection ($BB_1MM'_1$), de β sur BB¹, l'est aussi. Donc, la droite AM'_1, passe par les points P'_b, P'_c algébriquement associés de P′.

La division ($BB'_1N'M_1$) étant harmonique, et la droite AM′ coïncidant avec AM, la droite AM_1 coïncide avec AM'_1.

Remarques. — 1° En général, *étant donnés deux points* $P(\alpha, \beta, \gamma)$, $P_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, *pour obtenir la droite* AM *qui passe par le point* $P'(\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1)$, *on joindra* β *au pied de la droite* AP_1*; cette droite rencontrera* BB_1 *au point* M, *cherché.*

2° *Étant donnés deux points* $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, *pour obtenir le point* $P''(xx_1, yy_1, zz_1)$, *on doit remplacer, dans la construction précédente, le triangle complémentaire* A′B′C′ *par celui qui a pour sommets les pieds des bissectrices intérieures.* [Voir l'équation (1).]

3° *Si, le point* P *restant fixe, le point* P_1 *parcourt une courbe; les points* P′, P″ *parcourent deux autres courbes de même ordre.*

ERRATA

Numéro de novembre 1892.

P. 249, dernière formule, au dénominateur, *lisez*: $(p^2 - r\delta)^2$.
P. 250, avant-dernière formule, au dénominateur, *lisez*: $R + r'$.
P. 252, avant-dernière ligne, *lisez*: M_2, M'_2.
P. 256, cinquième formule, au dénominateur, *lisez*: $2R + r'$.
P. 257, *lisez*: $I'\Theta_a = 3.GI'$.
P. 258, première formule, *au lieu de* 4δ, *lisez*: 4S.
P. 258, deuxième formule, au numérateur, *lisez*: $4S \cot \theta$, et, au dénominateur, $(\cot^2 \theta - 3)^2$.
P. 263, ligne 7 (question 463), *au lieu de* R, *lisez*: 2R.
P. 245, dans l'énoncé 4, lignes 6, 7, 8, *échanger* les deux lettres ω et ϖ, et lire δ *au lieu de d* (voir, § VII la signification de ϖ).

RECTIFICATIONS

1° Le théorème proposé au numéro 461, sur les normales aux courbes données en coordonnées tripolaires se trouve dans l'article de M. A. Poulain publié dans *J. S.* 1891, p. 273, fin du numéro 24. Il est suivi d'un théorème plus général.

2° La question 466 a été proposée dans le Journal, sous le numéro 28 (tome I, 1877) et résolue (même tome, p. 220).

La question 467 proposée sous le numéro 32 (tome VI, 1882, p. 32) a été résolue (tome VII, p. 41).

D'après ces rectifications, il ne sera pas publié de nouvelles solutions des questions 461, 466, 467.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX. — RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25392-11-92.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Mélanges et correspondance.

Bibliographie.

Questions proposées.

Questions résolues (*).

(*) Jusqu'à présent, pour des causes diverses, tenant principalement à l'excès de copie, nous avons dû, bien malgré nous, laisser un intervalle de temps assez long entre le moment où une question était proposée et celui où nous pouvions publier sa solution. A l'avenir, nous espérons que cet inconvénient ne se présentera plus, et les solutions pourront être données dans les six mois qui suivront la publication des énoncés correspondants. Nous faisons, en conséquence, appel au zèle de nos collaborateurs pour qu'ils pressent l'envoi de leurs solutions et nous demandons, à ceux qui voudraient bien le faire, de nous indiquer des énoncés divers, accompagnés d'une solution, ou, tout au moins, d'une indication relative à cette solution; notre intention étant de développer, plus que nous n'avons pu le faire jusqu'ici, le nombre des exercices destinés aux élèves. G. L.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25895-11-92.

